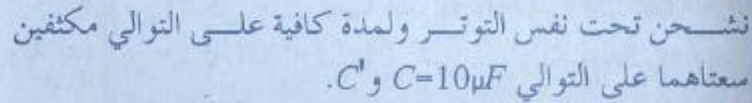


التمرين 1

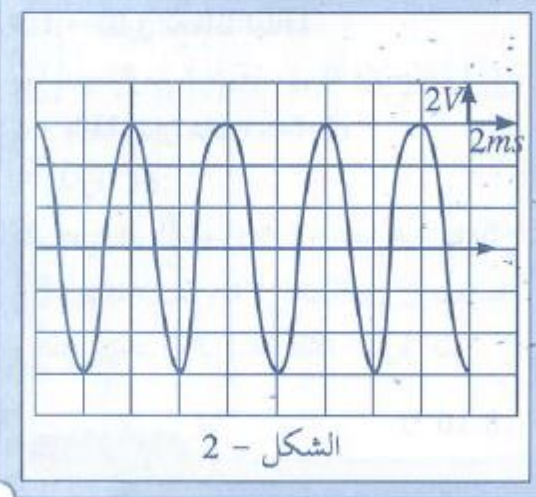


نشحن تحت نفس التوتر ولمدة كافية على التوالي مكثفين سعتاهما على التوالي $C=10\mu F$ و C'.

عند اللحظة $t=0$، نصل المكثف ذا السعة C بمربطي وشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها مهملة، ثم نعاين التوتر بين مربطي المكثف فنحصل على المنحنى الممثل في الشكل 1.

نعيد نفس التجربة باستعمال المكثف C' ونفس الوشيعة فنحصل على المنحنى الممثل في الشكل 2.

الشكل - 1



الشكل - 2

1- ما طبيعة التذبذبات في كل دارة؟

أعط تعبير الدور الخاص T_0 بنظام هذه التذبذبات.

2- حدد L و C'.

3- علماً أن شدة التيار منعدمة في كل من الدارتين عند اللحظة $t=0$.

1.3- هل طاقة الدارة توجد عند اللحظة $t=0$ مخزونة في المكثف أم في الوشيعة؟

2.3- عيّن قيمة هذه الطاقة بالنسبة لكل دارة عند اللحظة $t=0$.

3.3- هل هذه الطاقة تبقى ثابتة أم تتغير خلال الزمن؟ لماذا؟

4- على أي شكل تختزن كل دارة طاقتها عند اللحظة $t=6ms$.

5- استنتج شدة التيار المار في كل دارة عند اللحظة $t=6ms$.

الحل

1- طبيعة التوتر:

بما أن التوتر u_C بين مربطي المكثف عبارة عن دالة جيبية بدلالة الزمن.

فإن التذبذبات دورية بالنسبة للدارتين معاً.

يعبر عن الدور الخاص للتذبذبات الدورية الجيبية في الدارة LC بالعلاقة التالية: $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$

2- تحديد L و C':

بالنسبة للدارة (L,C):

لدينا: $T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$

إذن: $T_0^2 = 4\pi^2.LC$

ومنه: $L = \dfrac{T_0^2}{4\pi^2.C}$

لدينا من المبيان: $T_0=8ms=8.10^{-3}s$

ت.ع: $L = \dfrac{(8.10^{-3})^2}{4\pi^2.10.10^{-6}} \simeq 0,16H$

بالنسبة للدارة (L,C'):

لدينا: $T'_0 = 2\pi\sqrt{L.C'}$

ومنه: $C' = \dfrac{T'^2_0}{4\pi^2.L}$

مبيانيا نجد: $T'_0=4ms$.

ت.ع: $C' = \dfrac{(4.10^{-3})^2}{4\pi^2.0,16}$

$C' \simeq 2,5.10^{-6}F \simeq 2,5\mu F$

1.3- طاقة الدارة:

نعلم أن تعبير الطاقة المخزونة في الدارة LC هو:

$\mathscr{E}=\mathscr{E}_e+\mathscr{E}_m$

حيث: $\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}Cu_C^2$: الطاقة التي يختزنها المكثف.

و $\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}L.i^2$: الطاقة التي تختزنها الوشيعة.

عند اللحظة $t=0$ لدينا $i=0$، وبالتالي تكون الطاقة $\mathscr{E}_m$ منعدمة.

إذن: توجد الطاقة في كل من الدارتين مخزونة عند اللحظة $t=0$ في المكثف.

2.3– قيمة طاقة كل دارة:

– بالنسبة للدارة الأولى LC: $\mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}C.U_{0c}^2$

$$\mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}.10.10^{-6}.6^2 = 1,8.10^{-4}J$$

لدينا مبيانيا: $U_{0C}=6V$

– بالنسبة للدارة الثانية LC': $\mathscr{E}' = \frac{1}{2}C'.U_{0c}^2$

$$= \frac{1}{2}.2,5.10^{-6}.6^2 = 4,5.10^{-5}J$$

3.3– تعليل انحفاظ الطاقة:

بما أن مقاومة الوشيعة مهملة فإن طاقة الدارة تنحفظ.

4– طاقة الدارة عند $t=6ms$:

– الدارة LC:

بالرجوع إلى الشكل – 1، لدينا عند $t=6ms$: $u_C=0$

إذن الطاقة المخزونة في المكثف C منعدمة.

وبالتالي تختزن الوشيعة طاقة الدارة كلياً.

$\mathscr{E}_m=\mathscr{E}=1,8.10^{-4}J$

– الدارة LC':

من لشكل – 2، لدينا عند $t=6ms$: $u'_C=-6V$

$$\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}C'.u_{C'}^2$$

$$\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}.2,5.10^{-6}.(-6)^2$$

$$\mathscr{E}_e = 4,5.10^{-5}J = \mathscr{E}'$$

يختزن المكثف طاقة الدارة (LC') كلها عند اللحظة $t=6ms$.

إذن طاقة الوشيعة منعدمة.

5– تحديد شدة التيار:

في الدارة LC: $\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}Li^2$

بما أن $\mathscr{E}_m$ قصوية فإن: $i=I_m$: الشدة القصوية للتيار.

ومنه: $I_m = \sqrt{\frac{2\mathscr{E}_m}{L}}$

$$I_m = \sqrt{\frac{2.1,8.10^{-4}}{0,16}} \simeq 4,7.10^{-2}A$$

– في الدارة LC':

لدينا: $\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}L.i^2$

شدته التيار منعدمة لأن الطاقة $\mathscr{E}_m$ المخزونة في الوشيعة منعدمة.

التمرين 2

تتكون الدارة الكهربائية الممثلة في الشـــكل – 1 من:

– مكثف ســعته $C=100\mu F$ وشــيعة مقاومتها مهملة ومعامل تحريضها $L=0,1H$.

تتغيــر شــحنة المكثف q بدلالة الزمن حســب العلاقــة التالية:

$$q = q_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$$

q_m: الشحنة القصوية للمكثف.

ω_0: ثابتة تسمى النبض الخاص للدارة

φ: ثابتة تسمى الطور البدئي حيث: $-2\pi < \varphi < 2\pi$

يعطي الشكل–2 تمثيلا مبيانياً لتغيرات الشحنة q بدلالة الزمن.

1– عيّن مبيانياً q_m و T_0: الدور الخاص لتذبذبات الدارة.

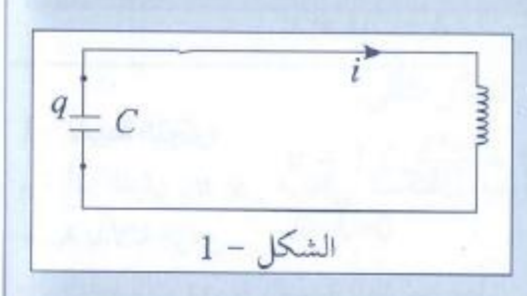
2– حدد ω_0 و φ.

3– عبّر عن شدة التيار i المار في الدارة بدلالة الزمن.

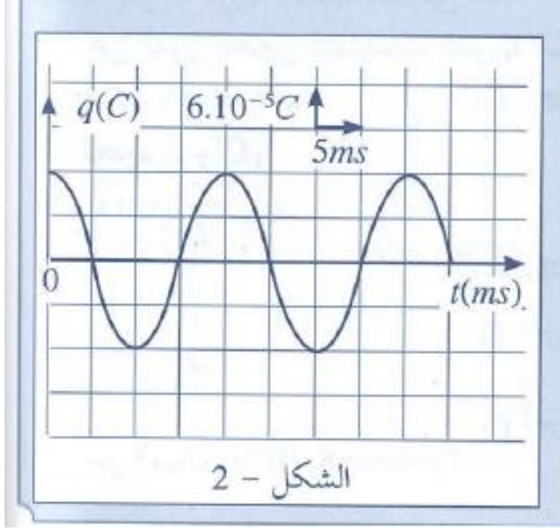
ما طبيعة هذا التيار؟ احسب شدته القصوية I_m.

4– عيّن اللحظات t التي تنعدم عندها شدة التيار.

استنتج شحنة المكثف عند هذه اللحظات؟



الشكل – 1



الشكل – 2

الحـل

1- تعبير q_m و T_0:

لدينا من المبيان: $q_m=2.6.10^{-5}=12.10^{-5}C$

$T_0=20ms$

$T_0=2.10^{-2}s$

2- تحديد ω_0 و φ:

- تحديد ω_0:

لدينا الدالة: $q = q_m\cos(\omega_0 t + \varphi)$

هذه الدالة جيبية دورية ودورها هو T_0 بحيث: $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$

إذن: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{T_0}$

ت.ع: $\omega_0 = \dfrac{2\pi}{2.10^{-2}} = 100\pi = 314\, rad/s$

- تحديد φ:

نعتبر الدالة $q(t)$ عند اللحظة $t=0$ بحيث: $q(0)=q_m$.

إذن: $q(0) = q_m.\cos(\omega_0 0 + \varphi)$

ومنه: $\cos\varphi = 1$

وبالتالي: $\varphi = 2k\pi$

وبما أن: $\varphi \leq 2\pi$ فإن: $\varphi = 0$

3- تعبير شدة التيار:

$$-\sin\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$$

حسب تعريف شدة التيار لدينا: $i = \dfrac{dq}{dt}$

وباعتبار الدالة $q=q(t)$ حيث: $q = q_m.\cos\omega_0 t$

فإن: $i = \dfrac{dq}{dt} = - q_m\omega_0\sin\omega_0 t$

أو $i = q_m\omega_0\cos\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

التيار المار في الدارة LC تيار متناوب جيبي.

حساب الشدة القصوية I_m: هذه الشدة تمثل وسع الدالة $i(t)$

يعني: $I_m = q_m\omega_0 = q_m.\dfrac{2\pi}{T_0}$

ت.ع: $I_m = \dfrac{12.10^{-5}.2.3,14}{2.10^{-2}} \simeq 3,77.10^{-2}A$

4- تعيين لحظات انعدام التيار:

لدينا: $i = I_m\cos\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

عند انعدام شدة التيار: $i=0$

ومنه: $\cos\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2}\right) = 0$

حل هذه المعادلة هو: $\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2} = (2k + 1)\dfrac{\pi}{2}$

لأن $k \in IN$: $\left(\omega_0 t + \dfrac{\pi}{2}\right) > 0$

إذن: $\omega_0 t = 2k.\dfrac{\pi}{2} = k\pi$

ومنه: $\dfrac{2\pi}{T_0}.t = k\pi$

وبالتالي: $t = k.\dfrac{T_0}{2}$

يعني: $t \in \left\{0, \dfrac{T_0}{2}, T, \dfrac{3T_0}{2}, ...\right\}$

تعيين شحنة المكثف:

لدينا العلاقة: $q = q_m\cos\omega_0 t$

بتعويض t: $q = q_m\cos k\pi = \pm q_m$

التمرين 3

نعتبر التركيب الممثل في الشكل أسفله حيث مقاومة الوشيعة مهملة.

نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع 1 فيشـــحن المكثف لمدة كافية تحت توتر ثابت $E=10V$، وعند لحظة نعتبرها أصلاً للتواريخ ($t=0$) نؤرجح القاطع إلى الموضع 2 فنلاحظ أن شحنة المكثف تتغير بدلالة الزمن حسب المعادلة التالية: $q(t) = q_m\cos\left(\dfrac{2\pi}{T_0}t + K\right)$

1- أثبت المعادلة التفاضلية التي تحققها q مستعملا الاصطلاح الممثل في الشكل.

2- احسب q_0 شحنة المكثف عند $t=0$.

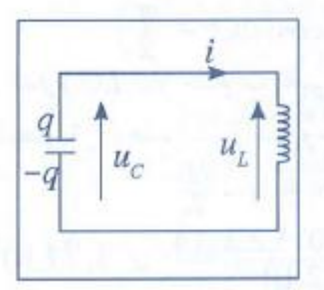
3- بيّن أن الثابتة K منعدمة.

4- أوجد تعبير الدور الخاص T_0 بدلالة L و C واحسب قيمته.

5- بين أن تعبير شدة التيار هو: $i = 10^{-2}\cos\left(10^4.t - \dfrac{\pi}{2}\right)$.

الحـــل

1- إثبات المعادلة التفاضلية:



لدينا انطلاقاً من الدارة، العلاقة التالية: $u_C = u_L$

مقاومة الوشيعة مهملة إذن: $u_L = L.\frac{di}{dt}$

ولدينا: $u_C = \frac{q}{C}$

إذن: $\frac{q}{C} = L.\frac{di}{dt}$

وحسب الاصطلاح المستعمل في الدارة: $i = -\frac{dq}{dt}$

$-q$ $+q$ ← i	$i = \frac{dq}{dt}$
i → $-q$ $+q$	$i = \frac{d(-q)}{dt} = -\frac{dq}{dt}$

ومنه: $\frac{di}{dt} = -\frac{d^2q}{dt^2}$

تكتب المعادلة (1) كالتالي: $\frac{q}{C} = -L.\frac{d^2q}{dt}$

يعني: $\frac{q}{C} + L.\ddot{q} = 0$

أو: $\ddot{q} + \frac{1}{LC}.q = 0$

2- حساب q_0:

عند اللحظة $t=0$ يوجد المكثف عند نهاية شحنه تحت التوتر E وتكون شحنته قصوية وقيمتها هي:

$q_0 = C.E$

$q_0 = 0,1.10^{-6}.10$

$q_0 = 10^{-6}C$

3- حساب K:

لدينا العلاقة: $q = q_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + K\right)$

عند اللحظة $t=0$: $q(0) = q_m \cos K$

$q_0 = q_m \cos K$

$\cos K = \frac{q_0}{q_m} = 1$

إذن: $K = 0$

4- تعبير T_0:

لدينا الدالة: $q = q_m\cos\frac{2\pi}{T_0}.t$

إذن: $\frac{dq}{dt} = \dot{q} = -q_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\frac{2\pi}{T_0}.t$

ومنه: $\frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q} = -q_m\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2\cos\frac{2\pi}{T_0}.t$

$= -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.q$

بالرجوع إلى المعادلة التفاضلية: $\ddot{q} + \frac{1}{LC}.q = 0$

نكتب: $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 q + \frac{1}{LC}.q = 0$

$q \neq 0$، إذن: $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 + \frac{1}{LC} = 0$

يعني: $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{1}{LC}$

$T_0 > 0$، إذن: $\frac{2\pi}{T_0} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

ومنه: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

ت.ع: $T_0 \simeq 2.3,14.\sqrt{0,1.0,1.10^{-6}}$

$T_0 \simeq 6,28.10^{-4}s$

5- تعبير شدة التيار:

لدينا من خلال منحى التيار الممثل في الدارة،

$i = -\frac{dq}{dt}$

ولدينا: $q = q_m\cos\frac{2\pi}{T_0}$

إذن: $\frac{dq}{dt} = -q_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\frac{2\pi}{T_0}.t$

وبالتالي: $i = q_m\frac{2\pi}{T_0}\sin\frac{2\pi}{T_0}.t$

ت. ع: $i = 0,01\sin 10^4.t$

أو: $i = 0,01\cos\left(10^4.t - \frac{\pi}{2}\right)$

التمرين 4

ننجز التركيب الممثل في الشكل جانبه والذي يشتمل على:

- مولد توتره ثابت $E=6V$. – موصل أومي مقاومته $R = 50\Omega$.
- مكثف سعته $C=0,9\mu F$. – قاطع التيار K.
- وشيعة مقاومتها مهملة ومعامل تحريضها L.

1- يوجد قاطع التيار K مغلقاً لمدة كافية يستقر خلالها النظام الدائم.

1.1- بين أن توتر الوشيعة منعدم.

2.1- استنتج شحنة المكثف وشدة التيار الذي يمر فيه.

3.1- احسب شدة التيار I_0 المار في الدارة.

2- نفتح القاطع K عند لحظة نعتبرها أصلاً للتواريخ.

1.2- ارسم تبيانة للدارة المدروسة في هذه الحالة.

2.2- عبر عن المعادلة التفاضلية لتغيرات التوتر u_C.

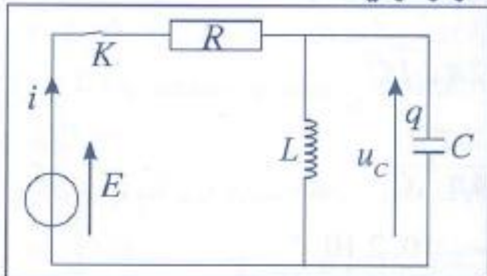
3.2- علماً أن حل هذه المعادلة يكتب كالتالي: $u_C(t) = U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$

- أوجد تعبير T_0 بدلالة C و L.
- حدد قيمة φ.
- أوجد تعبير U_m بدلالة E، R، C و L.

4.2- علماً أن $T_0=3,2ms$، حدد معامل التحريض L واكتب عددياً تعبير الدالة $u_C(t)$.

الحل

1.1- توتر الوشيعة:



نعلم أن تعبير توتر وشيعة مقاومتها مهملة هو $u_L = L.\frac{di}{dt}$.

عند استقرار النظام الدائم تكون شدة التيار ثابتة: $i=cte$،

ومنه: $u_L=0$.

2.1- شحنة المكثف وشدة التيار:

يعبر عن الشحنة q التي يختزنها مكثف بالعلاقة:

$q=Cu_C$

انطلاقا من التركيب، لدينا: $u_C=u_L=0$

وبالتالي: $q=0$

حسب تعريف شدة التيار الذي يمر في المكثف: $i_C = \frac{dq}{dt}$

لدينا عند كل لحظة: $q=0$، إذن: $i_C=0$

3.1- حساب I_0:

بتطبيق قانون إضافية التوترات، لدينا:

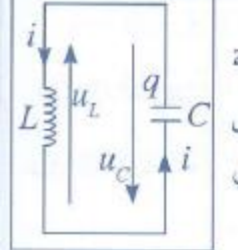
$E=u_R+u_L$

$E=R.I_0+0$

إذن: $I_0 = \frac{E}{R}$

ت.ع: $I_0 = \frac{6}{50} = 0,12A$

1.2- تبيانة الدارة:



بعد فتح القاطع K، تلعب الوشيعة دور مولد في دارة المكثف بفضل الطاقة المغناطيسية التي اختزنتها في الحالة السابقة.

2.2- المعادلة التفاضلية:

لدينا انطلاقا من تركيب الدارة: $u_L+u_C=0$

وباستعمال الاصطلاح مستقبل نكتب: $u_L = L.\frac{di}{dt}$

إذن: $u_C + L.\frac{di}{dt} = 0$

نعلم أن: $i=\frac{dq}{dt}$ حيث: $q=C.u_c$

إذن: $\frac{di}{dt}=C.\frac{d^2u_C}{dt}$

ومنه: $u_c+L.C.\frac{d^2u_C}{dt}=0$

وبالتالي: $\frac{d^2u_c}{dt}+\frac{1}{L.C}.u_c=0$

3.2- تعبير T_0، U_m، φ:

- تعبير T_0:

لدينا: $u_c=U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)$

إذن: $\frac{du_c}{dt}=-\frac{2\pi}{T_0}.U_m\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)$

و $\frac{d^2u_c}{dt^2}=-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)$

$=-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.u_C$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نكتب:

$-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2.u_c+\frac{1}{LC}.u_c=0$

أو $u_c\left[-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2+\frac{1}{LC}\right]=0$

عندلحظة t حيث $u_C\neq 0$، إذن: $-\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2+\frac{1}{L.C}=0$

يعني: $\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2=\frac{1}{LC}$

$T_0>0$ ، إذن: $\frac{2\pi}{T_0}=\sqrt{\frac{1}{LC}}$

$T_0=2\pi\sqrt{LC}$

تعبير φ، U_m:

حسب الشروط البدئية للدارة لدينا عند $t=0$: $q=0$،

$u_C=0$ ، $i=I_0$

نعتبر الدالة u_C: $u_c=U_m\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)$

عند اللحظة $t=0$ $u(0)=U_m\cos\varphi$

$0=U_m.\cos\varphi$

إذن: $\cos\varphi=0$

ومنه: $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}rad$

ونعتبر الدالة $i(t)$: $i=\frac{dq}{dt}=\frac{d(C.u_c)}{dt}=C.\frac{du_C}{dt}$

$i=-C.\frac{2\pi}{T_0}.U_m.\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.t+\varphi\right)$

$i(0)=-C.\frac{2\pi}{T_0}.U_m\sin\varphi$

$I_0=-C.\frac{2\pi}{T_0}.U_m\sin\varphi$

بما أن: $I_0>0$ فإن: $\sin\varphi<0$

ومنه: $\varphi=-\frac{\pi}{2}rad$

وبالتالي: $I_0=-C.\frac{2\pi}{T_0}.U_m(-1)$

ومنه: $U_m=\frac{I_0.T_0}{2\pi.C}$

$U_m=\frac{I_0.2\pi\sqrt{L.C}}{2\pi.C}$

$U_m=I_0\sqrt{\frac{L}{C}}=\frac{E}{R}.\sqrt{\frac{L}{C}}$

4.2- التعبير العددي للدالة $u_C(t)$:

نكتب تعبير الدالة $u_C(t)$ كالتالي:

$U_C=\frac{E}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.\cos\left(\frac{1}{\sqrt{LC}}.t-\frac{\pi}{2}\right)$

لدينا: $I_0=0,12A$

$C=0,9\mu F=9.10^{-7}F$

$T_0=2\pi\sqrt{LC}$

إذن: $L=\frac{T_0^2}{4\pi^2.C}$

$L=\frac{10,2.10^{-6}}{4.(3,14)^2.9.10^{-7}}$

$L\simeq 0,28H$

حساب U_m: $U_m=\frac{E}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

$U_m=\frac{6}{50}\sqrt{\frac{0,28}{0,9.10^{-6}}}$

$U_m=67V$

إذن: $u_C(t)=67\cos\left(224t-\frac{\pi}{2}\right)$

التمرين 5

نعتبر دارة كهربائية تتكون من مكثف سعته $C=22\mu F$ مشحون مسبقاً ووشيعة مقاومتها مهملة ومعامل تحريضها L.

يتغير التوتر u بين مربطي المكثف في هذه الدارة بدلالة الزمن حسب العلاقة التالية: $u = U_0\cos\frac{2\pi}{T_0}.t$

U_0: التوتر القصوي للمكثف

$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$: الدور الخاص للتذبذبات في هذه الدارة.

يمثل الشكل جانبه تغيرات الطاقة $\mathscr{E}_e$ المخزونة في المكثف بدلالة الزمن.

1- عيّن الطاقة القصوية $\mathscr{E}_{e\,max}$ التي يختزنها المكثف واستنتج التوتر U_0.

2- اكتب تعبير الطاقة الكهربائية التي يختزنها المكثف عند لحظة t بدلالة $\mathscr{E}_{max}$، T_0 و t.

3- عين مبيانياً الدور T للدالة $\mathscr{E}_e(t)$.

4- تحقق أن $T = \frac{T_0}{2}$، ثم استنتج معامل التحريض L.

5- اكتب تعبير الطاقة $\mathscr{E}_m$ التي تختزنها الوشيعة عند لحظة t بدلالة $\mathscr{E}_{e\,max}$ و T_0 و t.

6- بين أن الطاقة الكلية المخزونة في الدارة ثابتة وعيّن قيمتها.

7- أوجد بدلالة U_0 التوتر بين مربطي المكثف عندما يختزن هذا الأخير نفس الطاقة التي تختزنها الوشيعة.

الحل

1- تعيين $\mathscr{E}_{emax}$:

لدينا انطلاقا من المبيان: $\mathscr{E}_{emax} = 2.10^{-4}J$

يعبر عن الطاقة التي يختزنها مكثف بدلالة التوتر بين مربطيه بالعلاقة: $\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}Cu^2$

عندما تكون هذه الطاقة قصوية فإن التوتر u يكون أيضا قصويا بحيث: $\mathscr{E}_{emax} = \frac{1}{2}Cu^2_{max}$

ولدينا: $U_{max}=U_0$، إذن: $\mathscr{E}_{emax} = \frac{1}{2}CU_0^2$

ومنه: $U_0 = \sqrt{2\frac{\mathscr{E}_{e_{max}}}{C}}$

ت.ع: $U_0 = \sqrt{\frac{2.2.10^{-4}}{22.10^{-6}}} = 4,26V$

2- تعبير الطاقة $\mathscr{E}_e(t)$:

لدينا: $\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}Cu^2$

بتعويض u، حسب العلاقة $u = U_0\cos\frac{2\pi}{T_0}t$، نكتب:

$\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}.C.U_0^2\cos^2\frac{2\pi}{T_0}.t$

$\mathscr{E}_e = \mathscr{E}_{e_{max}}.\cos^2\frac{2\pi}{T_0}.t$

3- تعيين الدور T:

لدينا من المبيان: $T=2.10^{-3}s$

4- التحقق من العلاقة $T = \frac{T_0}{2}$ واستنتاج L:

بما أن T هو دور الدالة $\mathscr{E}_e$ فإن: $\mathscr{E}_e(t) = \mathscr{E}_e(t+T)$

نعتبر مثلا اللحظة $t=0$ ونكتب: $\mathscr{E}_e(0) = \mathscr{E}_e(T)$

يعني: $\mathscr{E}_{emax} = \mathscr{E}_{emax}.\cos^2\frac{2\pi}{T_0}.T$

ومنه: $\cos^2\frac{2\pi}{T_0}.T = 1$

وبالتالي: $\cos 2\pi\frac{T}{T_0} = \pm 1$

$2\pi\frac{T}{T_0} = K.\pi$

> $\cos\alpha = \pm 1$
> إذن: $\alpha = K\pi$
> $K \in \mathbb{Z}$

نعتبر $K=1$ لأن T يمثل أصغر أدوار الدالة.

إذن: $2\pi.\frac{T}{T_0} = \pi$

ومنه: $T = \frac{T_0}{2}$

تكون طاقة المكثف قصوية بعد كل نصف دور T_0 للتذبذبات الحرة.

– استنتاج L:

لدينا: $T = \frac{T_0}{2}$

وحسب تعبير الدور الخاص للدارة LC لدينا:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$$

إذن: $2T = 2\pi\sqrt{LC}$

ومنه: $T = \pi\sqrt{LC}$

إذن: $L = \frac{T^2}{C.\pi^2}$

ت. ع: $L = \frac{(2.10^{-3})^2}{22.10^{-6}.10} = 1,82.10^{-2}H$

5– تعبير طاقة الوشيعة:

يعبر عن طاقة وشيعة معامل تحريضها L، عندما يمر فيها تيار كهربائي شدته i كالتالي: $\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}.L.i^2$

لدينا: $i = \frac{dq}{dt}$

وبالنسبة للدارة LC: $q=C.u$

إذن: $i = C.\frac{du}{dt}$

وباعتبار الدالة u حيث: $u = U_0\cos\frac{2\pi}{T_0}t$

فإن: $\frac{du}{dt} = -\frac{2\pi}{T_0}.U_0\sin\frac{2\pi}{T_0}.t$

ومنه: $i = -\frac{2\pi}{T_0}C.U_0\sin\frac{2\pi}{T_0}t$

وبالتالي: $i^2 = \frac{4\pi^2.c^2.u_0}{T_0^2}\sin^2\frac{2\pi}{T_0}t$

وباعتبار أن: $T_0^2 = 4\pi^2 LC$

فإن: $i^2 = \frac{4\pi^2 C^2 U_0^2}{4\pi^2 L.C}\sin^2\frac{2\pi}{T_0}t$

$$i^2 = \frac{C}{L}U_0^2\sin^2\frac{2\pi}{T_0}t$$

إذن: $\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}L\,i^2$ تكتب كالتالي:

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}C.U_0^2.\sin^2\frac{2\pi}{T_0}.t$$

$$= \mathscr{E}_{e\max}\sin^2\frac{2\pi}{T_0}.t$$

6– الطاقة الكلية المخزونة في الدارة:

نعلم أن:

$$\mathscr{E}_t = \mathscr{E}_e + \mathscr{E}_m$$

$$= \mathscr{E}_{e\max}\cos^2\frac{2\pi}{T_0}t + \mathscr{E}_{e\max}\sin^2\frac{2\pi}{T_0}t$$

$$= \mathscr{E}_{e\max}\left(\cos^2\frac{2\pi}{T_0}t + \sin^2\frac{2\pi}{T_0}.t\right) = \mathscr{E}_{e\max}$$

ت. ع: $\mathscr{E}_t = \mathscr{E}_{\max} = 2.10^{-4}J$

7– تعبير u بدلالة U_0:

نعتبر العلاقة: $\mathscr{E}_t = \mathscr{E}_e + \mathscr{E}_m$

الوشيعة و المكثف يختزنان نفس الطاقة، إذن: $\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_e$

ومنه: $\mathscr{E}_t = 2\mathscr{E}_e$

يعني: $\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}\mathscr{E}_t$

وبتعويض كل من $\mathscr{E}_t$ و $\mathscr{E}_e$ نكتب $\frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}.\mathscr{E}_{C\max}$

وحسب السؤال (1) لدينا: $\mathscr{E}_{C\max} = \frac{1}{2}CU_0^2$

إذن: $\frac{1}{2}Cu^2 = \frac{1}{2}.\frac{1}{2}C\,U_0^2$

وبالتالي: $u^2 = \frac{U_0^2}{2}$

إذن: $u = \pm\frac{U_0}{\sqrt{2}}$

التمرين 6

تحتوي دارة كهربائية على:

– وشيعة معامل تحريضها $L=0,1H$ ومقاومتها r.

– مكثف سعته C.

يمثل الشكل جانبه التوتر u بين مربطي المكثف، المعاين على شاشة كاشف للتذبذب، حيث تم ضبطه على الحساسيات التالية:

– الحساسية الرأسية: $1V.div^{-1}$.

– الحساسية الأفقية: $50\mu s.div^{-1}$.

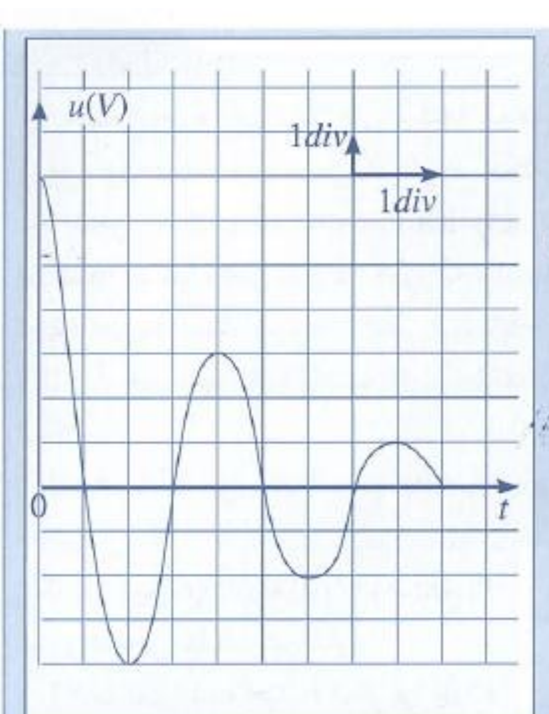
1– ما نظام التذبذبات الكهربائية في هذه الدارة؟

2– عين شبه الدور T للتذبذبات واستنتج ترددها f.

3- علماً أن الخمود لا يؤثر على دور التذبذبات، عيّن سعة المكثف.

4- احسب الطاقة البدئية $\mathscr{E}_0$ للمكثف.

5- احسب الطاقة المبددة في الدارة بين اللحظتين $t_0=0$ و $t_1=0,2ms$.



الحل

1- نظام التذبذبات:

نلاحظ من خلال الشكل أن التذبذبات الكهربائية شبه دورية.

2- تعيين T:

مبيانياً لدينا: $T=4div=200\mu s$

$T=2.10^{-4}s$

قيمة التردد f: $f=\frac{1}{T}$

$f=\frac{1}{2.10^{-4}}=5.10^{3}Hz$

3- حساب C:

يعبر عن الدور الخاص للمتذبذب LC بالعلاقة:

$T_0=2\pi\sqrt{LC}$

وبما أن شبه الدور T للدارة الحقيقية RLC يساوي تقريباً الدور الخاص T_0 فإن: $T=2\pi\sqrt{LC}$

ومنه: $T^2=4\pi^2LC$

وبالتالي: $C=\frac{T^2}{4\pi^2L}$

ت.ع: $C=\frac{(2.10^{-4})^2}{4.\pi^2.0,1}\simeq 10\,nF$

4- الطاقة البدئية للمكثف:

نعبر عن الطاقة المخزونة في مكثف بدلالة التوتر بين مربطيه كالتالي: $\mathscr{E}=\frac{1}{2}CU^2$

عند اللحظة البدئية $t_0=0$: $\mathscr{E}_0=\frac{1}{2}CU_0^2$

لدينا من المبيان: $U_0=7div$

$U_0=7V$

حساب $\mathscr{E}_0$: $\mathscr{E}_0=\frac{1}{2}CU_0^2$

$\mathscr{E}_0=\frac{1}{2}.10.10^{-9}.7^2$

$\mathscr{E}_0=2,45.10^{-7}J$

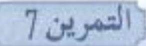
5- الطاقة المبددة:

عند اللحظة t_1 يصبح توتر المكثف هو U_1، وطاقته هي: $\mathscr{E}_1=\frac{1}{2}CU_1^2$

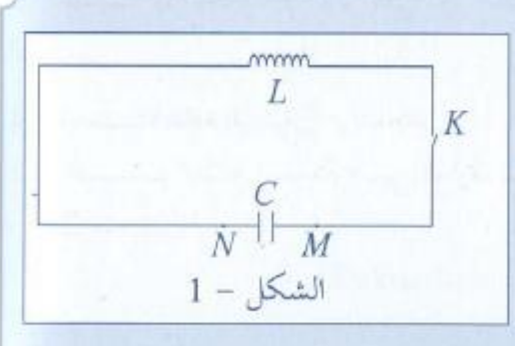
الطاقة المبددة بمفعول جول في الدارة بين اللحظتين t_0 و t_1: $\mathscr{E}_{th}=\mathscr{E}_0-\mathscr{E}_1=\frac{1}{2}C(U_0^2-U_1^2)$

مبيانيا: $U_1=3\,div=3V$

ت.ع: $\mathscr{E}_{th}=\frac{1}{2}.10.10^{-9}(7^2-3^2)=2.10^{-7}J$



1- تشتمل دارة كهربائية على وشيعة معامل تحريضها $L=1H$ ومقاومتها مهملة، مركبة على التوالي مع مكثف سعته $C=10\mu F$. بعد شحن المكثف تحت توتر $U_0=100V$، بحيث يحمل لبوسه M شحنة موجبة، نغلق الدارة الكهربائية بواسطة قاطع للتيار K عند لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ. (انظر الشكل - 1).



الشكل - 1

1.1- أوجد المعادلة التفاضلية التي يُحققها التوتر u بين لبوسي المكثف.

2.1- علماً أن حل هذه المعادلة التفاضلية يكتب على الشكل التالي: $u = U_{max}\cos\alpha t$

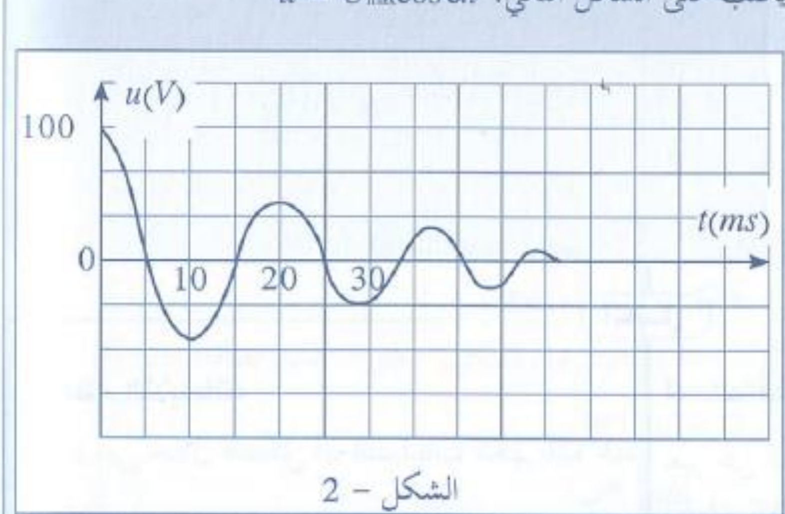
- عيّن U_{max}.

- أوجد تعبير α بدلالة L و C واستنتج T_0 الدور الخاص لتذبذبات الدارة.

3.1- ما تعبير شدة التيار i المار في الدارة المتذبذبة؟ استنتج قيمته القصوية I_m.

2- نركب في الدارة الكهربائية السابقة على التوالي مع الوشيعة موصلا أوميا مقاومته R.

نعيد نفس التجربة السابقة ونعاين بواسطة كاشف التذبذب التوتر u بين مربطي المكثف فنحصل على المنحنى الممثل في الشكل - 2 .



الشكل - 2

1.2- ماذا نلاحظ؟ أعط تفسيرا كيفيا لشكل المنحنى.

2.2- اعتمادا على دراسة طاقية أوجد المعادلة التفاضلية للمتذبذب RLC.

الحــل

1.1- المعادلة التفاضلية:

لدينا مقاومة الوشيعة مهملة:

$$U_L = L.\frac{di}{dt}$$

ولدينا: $i = \frac{dq}{dt}$ و $q=C.u$

إذن: $u_L = L.\frac{d^2q}{dt^2}$

$$u_L = LC.\frac{d^2u}{dt^2}$$

وحسب قانون إضافية التوترات: $u+u_L=0$

ومنه: $u + LC.\frac{d^2u}{dt^2} = 0$

2.1- تحديد α و T_0:

حل المعادلة التفاضلية السابقة يكتب كالتالي:

$$u = U_{max}\cos(\alpha t)$$

إذن:

$$\frac{du}{dt} = -U_{max}.\alpha.\sin\alpha t$$

$$\frac{d^2u}{dt^2} = -\alpha^2.u$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية:

$$u + LC.(-\alpha^2.uc) = 0$$

$$u \neq 0 \Rightarrow 1 - LC.\alpha^2 = 0$$

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

ونعلم أن الدوال الجيبية دورية.

> دور دالة جيبية
>
> $f(x)=a\cos(bx+c)$
>
> $b>0$
>
> $T = \frac{2\pi}{b}$

دور الدالة: $u(t) = U_{max}.\cos(\alpha t + \varphi)$ هو:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\alpha}$$

إذن:

$$T_0 = \frac{2\pi}{\frac{1}{\sqrt{LC}}} = 2\pi\sqrt{LC}$$

ت.ع:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{1.10.10^{-6}} = 2.10^{-2}s$$

3.1- تعبير شدة التيار:

حسب تعريف شدة التيار في الدارة السابقة: $i = \frac{dq}{dt}$

وبما أن: $q=C.u$

فإن:

$$i = C.\frac{du}{dt}$$

$$= C.(-\alpha U_0 \sin\alpha t)$$

$$= C\alpha U_0\cos\left(\alpha t + \frac{\pi}{2}\right)$$

$-\sin\alpha = \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right)$

$$i = I_0\cos\left(\alpha t + \frac{\pi}{2}\right)$$

حيث:

$$I_0 = C.\frac{1}{\sqrt{LC}}.U_0 = U_0\sqrt{\frac{C}{L}}$$

ت.ع:

$$I_0 = 100.\sqrt{\frac{10^{-5}}{1}} \simeq 0,316A$$

1.2- ملاحظة وتعليل المنحنى:

- نلاحظ، بعد إضافة الموصل الأومي إلى الدارة LC، أن:
- التوتر القصوي للمكثف يتناقص تدريجيا.
- الدور T للتذبذبات يساوي $20ms$، ويطابق ذلك قيمة شبه الدور الخاص T_0 للدارة المثالية LC.
- نظام التذبذبات شبه دوري حيث u دالة جيبية مخمدة، ويعزى ذلك إلى تبدد الطاقة الكهربائية للمجموعة LC بمفعول جول في الموصل الأومي.

2.2- المعادلة التفاضلية:

تعبير الطاقة المخزونة في الدارة:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_e + \mathscr{E}_m$$

$$(1)\ \mathscr{E} = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}L.i^2$$

خلال المدة dt الفاصلة بين اللحظتين t و $t+dt$، تتناقص الطاقة $\mathscr{E}$ بالمقدار $d\mathscr{E}$ بحيث:

$$d\mathscr{E} = \mathscr{E}(t+dt) - \mathscr{E}(t)$$

المقدار $d\mathscr{E}$ يمثل الطاقة الحرارية التي تتبدد بمفعول جول خلال المدة dt، وهي مدة وجيزة نعتبر شدة التيار خلالها ثابتة.

تعبير الطاقة الحرارية $\mathscr{E}_{th}$:

$$\mathscr{E}_{th} = R.i^2.dt$$

ولدينا: $d\mathscr{E} < 0$، إذن:

$$d\mathscr{E} = -\mathscr{E}_{th}$$

$$d\mathscr{E} = -R.i^2.dt$$

إذن:

$$(2)\ \frac{d\mathscr{E}}{dt} = -Ri^2$$

نشتق $\mathscr{E}$ في العبارة (1):

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{1}{2}C.2.u.\frac{du}{dt} + \frac{1}{2}L.2.i.\frac{di}{dt}$$

ولدينا: $i = C\frac{du}{dt}$، إذن: $\frac{du}{dt} = \frac{1}{C}.i$

و

$$\frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u}{dt}$$

إذن:

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = C.u.\frac{1}{C}.i + L.i.C.\frac{d^2u}{dt}$$

$$= i\left(u + L.C.\frac{d^2u}{dt}\right)$$

وباعتبار العلاقة (2):

$$-Ri^2 = i\left(u + L.C.\frac{d^2u}{dt}\right)$$

$i \neq 0$، إذن:

$$u + LC.\frac{d^2u}{dt} = -Ri = -R.C\frac{du}{dt}$$

يعني:

$$u + RC.\frac{du}{dt} + L.C.\frac{d^2u}{dt} = 0$$

أو:

$$\frac{d^2u}{dt} + \frac{R}{L}.\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}.u = 0$$

التمرين 8

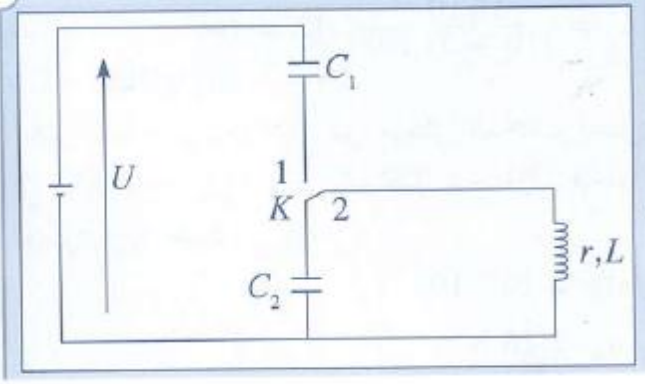
نعتبر التركيب الكهربائي الممثل في الشكل جانبه.

نعطي: $U=12V$ ؛ $C_1=10\mu F$ ؛ $C_2=2\mu F$ ؛ $L=0,1H$

1- قاطع التيار في الموضع (1):

1.1- احسب قيمة التوتر U_2 بين قطبي المكثف ذي السعة C_2.

2.1- استنتج الشحنة الكهربائية القصوية q_m لهذا المكثف.



2- نؤرجح قاطع التيار إلى الموضع (2) في اللحظة التي تاريخها $t=0$.

1.2- أثبت المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة q للمكثف C_2.

2.2- بين أن الطاقة $\mathscr{E}$ التي تختزنها الدارة تتناقص مع مرور الزمن.

3.2- نهمل مقاومة الوشيعة.

في هذه الحالة تتغير الطاقة $\mathscr{E}_e$ التي يختزنها المكثف بدلالة الزمن حسب العلاقة التالية: $\mathscr{E}_e = \mathscr{E}_0 . \cos^2 \frac{2\pi}{T}.t$.

1.3.2- حدد قيمة $\mathscr{E}_e$ عند اللحظة $t=0$.

2.3.2- تحقق من أن الطاقة $\mathscr{E}$ التي تختزنها الدارة تنحفظ خلال التذبذبات. عين قيمة $\mathscr{E}$.

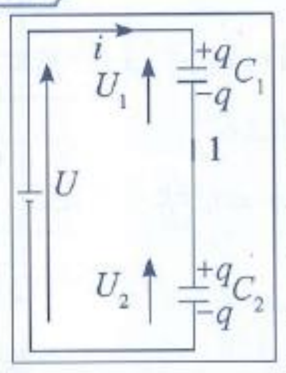
3.3.2- عبر بدلالة $\mathscr{E}_0$، T_0 و t عن الطاقة $\mathscr{E}_m$ التي تختزنها الوشيعة عند اللحظة t.

4.3.2- أوجد بدلالة T_0 اللحظات t التي يختزن عندها المكثف 50% من الطاقة الكلية المخزونة في الدارة.



الحل

1.1- حساب التوتر u_2:



لدينا: $U = U_1 + U_2$

المكثفان C_1 و C_2 مركبان على التوالي، يمر في كل منهما. إذن نفس التيار الكهربائي، وبالتالي فهما يختزنان في كل لحظة نفس الشحنة q بحيث:

$q=C_1U_1$ و $q=C_2U_2$

إذن: $C_1U_1=C_2U_2$

ومنه: $U_1 = \frac{C_2U_2}{C_1}$

العلاقة (1) تصبح: $U = \frac{C_2U_2}{C_1} + U_2$

$$U = U_2\left(\frac{C_2}{C_1} + 1\right) = U_2.\frac{C_2 + C_1}{C_1}$$

وبالتالي: $U_2 = \frac{C_1}{C_1 + C_2}.U$

ت.ع: $U_2 = \frac{10.10^{-6}}{(10 + 2).10^{-6}}.12 = 10V$

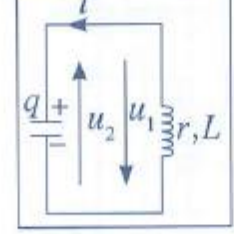
2.1- استنتاج q_m:

خلال شحنه، يرتفع التوتر بين مربطي المكثف ليصل في نهاية الشحن إلى القيمة U_2 وتصل شحنته إلى قيمتها القصوى q_m بحيث: $q_m=C_2U_2$

$q_m=2.10^{-6}.10$

$q_m=2.10^{-5}C$

1.2- إثبات المعادلة التفاضلية:



$u_2+u_1=0$

$$\frac{q}{C_2} + ri + L\frac{di}{dt} = 0$$

لدينا: $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ و $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} = \ddot{q}$

إذن: $\frac{q}{C_2} + r\dot{q} + L.\ddot{q} = 0$

$$\ddot{q} + \frac{r}{L}.\dot{q} + \frac{1}{LC_2}.q = 0$$

2.2- تناقص الطاقة $\mathscr{E}$:

لدينا حسب تعبير الطاقة المخزونة في كل من المكثف والوشيعة:

$$\mathscr{E}_e = \frac{1}{2C_2}q^2$$

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}L.i^2$$

المجموعة LC تختزن الطاقة:

$$\mathscr{E} = \frac{1}{2C_2}q^2 + \frac{1}{2}L\,i^2$$

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{1}{2C_2}.2q\,\dot{q} + \frac{1}{2}L.2.i.\frac{di}{dt}$$

ولدينا: $i = \frac{dq}{dt} = \dot{q}$ و $\frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$

إذن: $\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \dot{q}.\frac{q}{C_2} + L.\dot{q}.\frac{d^2q}{dt}$

$$= i\left(\frac{q}{C_2} + L.\frac{d^2q}{dt}\right) = i\left(\frac{q}{C_2} + L\ddot{q}\right)$$

ومن المعادلة التفاضلية لدينا:

$$L.\ddot{q} + \frac{q}{C_2} = -r\dot{q} = -ri$$

إذن: $\frac{d\mathscr{E}}{dt} = i(-r.i) = -r.i^2$

المقدار: $r.i^2>0$، إذن: $\frac{d\mathscr{E}}{dt} < 0$

الدالة $\mathscr{E} = \mathscr{E}(t)$ دالة تناقصية بدلالة الزمن.

2.3.1- تعيين $\mathscr{E}_e$:

عند اللحظة $t=0$: $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0 \cos 0 = \mathscr{E}_0$

ولدينا: $\mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}CU^2$

ت.ع: $\mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}.10.10^{-6}(12)^2 = 72.10^{-5}J$

2.3.2- انحفاظ $\mathscr{E}$:

لدينا: $\frac{d\mathscr{E}}{dt} = -r.i^2$

إذا اعتبرنا المقاومة r مهملة فإن: $r=0$،

ومنه: $\frac{d\mathscr{E}}{dt} = 0$

إذن: $\mathscr{E} = cte$

تعيين قيمة $\mathscr{E}$:

بما أن: $\mathscr{E}$ تنحفظ، يمكن أن نكتب:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}(t=0) = \mathscr{E}_e(t=0) + \mathscr{E}_m(t=0)$$

عند اللحظة $t=0$، لحظة إغلاق الدارة، توجد الطاقة مخزونة في المكثف فقط.

إذن: $\mathscr{E} = \mathscr{E}_e(t=0) = \mathscr{E}_0$

$$\mathscr{E} = 72.10^{-5}J$$

2.3.3- طاقة الوشيعة:

نعلم أن: $\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}L.i^2$

ولدينا: $\mathscr{E}_e = \mathscr{E}_0 \cos^2 \frac{2\pi}{T_0}.t$

نعلم أن الطاقة المخزونة في الدارة $\mathscr{E}$ ثابتة:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_e + \mathscr{E}_m$$

لدينا: $\mathscr{E}_e = \mathscr{E}_0$

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_e$$

$$= \mathscr{E}_0 - \mathscr{E}_0.\cos^2 \frac{2\pi}{T_0}.t$$

$$= \mathscr{E}_0\left(1 - \cos^2 .\frac{2\pi}{T_0}.t\right)$$

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_0.\sin^2 \frac{2\pi}{T_0}.t$$

2.3.4- تحديد اللحظات:

إذا كان المكثف يختزن 50% من طاقة الدارة فإن:

$$\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}\mathscr{E}$$

وبحيث $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0$ فإن: $\mathscr{E}_0 \cos^2 \frac{2\pi}{T_0}t = \frac{1}{2}\mathscr{E}_0$

نضع $\frac{2\pi}{T_0}t = \alpha$: $\mathscr{E}_0 \cos^2\alpha = \frac{\mathscr{E}_0}{2}$

$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}$$

يعني: $2\cos^2\alpha - 1 = 0$

$$\cos 2\alpha = 0$$

> $2\cos^2\alpha - 1 = \cos 2\alpha$
> حل المعادلة: $cosx=0$
> هو $x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$
> $K \in \mathbb{Z}$

$$2\alpha = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

$$2.\frac{2\pi}{T_0}t = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

نعتبر $k \in IN$ لأن $t>0$

$$t = (2k+1).\frac{T_0}{8}$$

$$t = \frac{T_0}{8}, \frac{3}{8}T_0, \frac{5}{8}T_0, \ldots\ldots\ldots\ldots$$

التمرين 9

نشحن مكثفاً سعته $C=1,8\mu F$ تحت توتر ثابت $E=20V$، ثم نصل مربطيه عند لحظة $t_0=0$ بطرفي وشيعة معامل تحريضها $L=10mH$.

عند لحظة t، بعدما تنجز الدارة العدد $n=100$ من التذبذبات الكهربائية، تتقلص الطاقة الكهربائية التي تختزنها الدارة بنسبة 80%.

1- احسب الطاقة $\mathscr{E}_0$ التي تختزنها الدارة عند اللحظة $t_0=0$.

2- علل سبب تناقص الطاقة المخزونة في الدارة.

- احسب الطاقة $\mathscr{E}$ التي تختزنها الدارة عند اللحظة t.
ل هذه الطاقة توجد مخزونة عند هذه اللحظة في المكثف أم في الوشيعة؟
- استنتج شحنة المكثف عند اللحظة t.
- أوجد القدرة الكهربائية المتوسطة $\mathscr{P}_m$ المبددة لمفعول جول بين اللحظتين 0 و t.
تبر أن شبه الدور T يساوي الدور الخاص للتذبذبات في الدارة.

الحـل

1- حساب $\mathscr{E}_0$:
وجد طاقة الدارة $\mathscr{E}_0$ لحظة ربط المكثف بالوشيعة مخزونة في المكثف.
ذن:
$$\mathscr{E}_0 = \mathscr{E}_C = \frac{1}{2}CE^2$$
ت.ع:
$$\mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}.1,8.10^{-6}.(20)^2$$
$$\mathscr{E}_0 = 3,6.10^{-4}J$$

2- تعليل:
يعزى سبب تناقص طاقة الدارة إلى تبدد هذه الطاقة بمفعول جول في مقاومة الوشيعة.

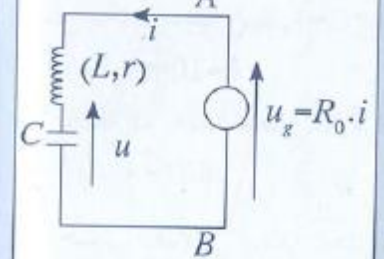
3- حساب $\mathscr{E}$:
بما أن الطاقة البدئية $\mathscr{E}_0$ للدارة تتناقص بنسبة 80% فإنه يتبقى منها فقط 20% عند اللحظة t
يعني:
$$\mathscr{E} = \frac{20}{100}\mathscr{E}_0 = 0,2\mathscr{E}_0 = 0,72.10^{-4}J$$
عند اللحظة البدئية $t_0=0$ يختزن المكثف كل الطاقة الموجودة في الدارة.
ونعلم أن المكثف والوشيعة يتبادلان هذه الطاقة بشكل دوري.
إذن: عند اللحظة t حيث تنجز الدارة عددا صحيحا من التذبذبات، فإن طاقة الدارة يختزنها المكثف كليا عند بداية كل نصف شبه دور.

4- شحنة المكثف:
نعلم أن تعبير طاقة المكثف هو:
$$\mathscr{E}_e = \frac{1}{2C}q^2$$
ولدينا حسب السؤال 3:
$$\mathscr{E}_e = \mathscr{E}$$
إذن:
$$\mathscr{E} = \frac{1}{2C}q^2$$
ومنه:
$$q = \sqrt{2C\mathscr{E}}$$
ت.ع:
$$q = \sqrt{2.1,8.10^{-6}.0,72.10^{-4}}$$
$$q=1,61.10^{-5}C$$

5- القدرة الكهربائية المتوسطة:
نعبر عن القدرة الكهربائية المتوسطة $\mathscr{P}_m$ بالعلاقة:
$$\mathscr{P}_m = \frac{\mathscr{E}_{th}}{\Delta t}$$
حيث: $\mathscr{E}_{th}$ الطاقة الحرارية المبددة بمفعول جول
$$\mathscr{E}_{th} = 0,8\mathscr{E}_0$$
المدة Δt تمثل $n=100$ تذبذبة إذن: $\Delta t = n.T = n.T_0$
ولدينا:
$$T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$
إذن:
$$\mathscr{P}_m = \frac{\mathscr{E}_{th}}{2\pi n\sqrt{LC}}$$
ت.ع:
$$\mathscr{P}_m = \frac{2,88.10^{-4}}{2.3,14.100\sqrt{1010^{-3}.1,8.10^{-6}}}$$
$$\mathscr{P}_m=3,42.10^{-3}W$$

التمرين 10

نتوفر على مكثف سعته C مشحون مسبقاً ووشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها $r = 40\Omega$.
للحصول على تذبذبات جيبية في دارة المكثف والوشيعة السابقتين ننجز التركيب الممثل في الشكل – 1، حيث G مولد يزود الدارة بتوتر u_g يتناسب إطراداً مع i شدة التيار الذي يمر فيه.



الشكل – 1

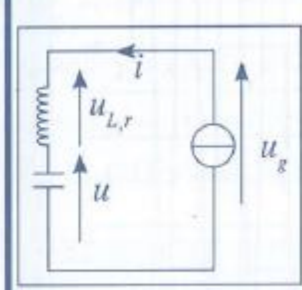
1- بيّن أن المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u بين مربطي المكثف تكتب على الشكل التالي:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{r-R_0}{L}.\frac{du}{dt}+\frac{1}{LC}.u=0$$

2- استنتج القيمة التي يجب أن تأخذها R_0 للحصول على تذبذبات دورية.

الحل

1- إثبات المعادلة التفاضلية:



انطلاقا من التركيب لدينا:

$$u+u_{(L,r)}=u_g$$

$$u+r.i+L.\frac{di}{dt}=R_0.i$$

باعتبار تعريف الشدة i وتعبير الشحنة q حيث $i=\frac{dq}{dt}$ و $q=Cu$

نستنتج أن: $i=C.\frac{du}{dt}$، ومنه: $\frac{di}{dt}=C.\frac{d^2u}{dt^2}$

إذن: $u+rC\frac{du}{dt}+LC\frac{d^2u}{dt^2}=R_0.C\frac{du}{dt}$

ومنه: $LC\frac{d^2u}{dt^2}+(r-R_0)C.\frac{du}{dt}+u=0$

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{(r-R_0)}{L}.\frac{du}{dt}+\frac{1}{LC}.u=0$$

2- قيمة R_0:

نعلم أن المعادلة التفاضلية التي تميز التذبذبات في الدارة المثالية تكتب على الشكل التالي:

$$\frac{d^2u}{dt^2}+\frac{1}{LC}u=0$$

للحصول على هذه النتيجة يجب أن يتحقق الشرط التالي: $\frac{r-R_0}{L}=0$

يعني: $R_0=r=20\Omega$

التمرين 11

تحتوي الدارة الممثلة في الشكل جانبه على:

- وشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها R.
- مكثف سعته C.
- ثنائي قطب D بحيث التوتر بين مربطيه u_D يحقق في الاصطلاح مستقبل العلاقة التالية: $u_D=-R_0.i$ $(R_0>0)$

1- بيّن أن التوتر u_C بين مربطي المكثف يحقق المعادلة التفاضلية التالية:

$L.C.\ddot{u}_C+A.C.\dot{u}_C+u_C=0$ حيث A ثابتة، و $\dot{u}=\frac{du}{dt}$ و $\ddot{u}=\frac{d^2u}{dt^2}$

2- نضبط R_0 على القيمة R.

1.2- ما قيمة المعامل A؟

2.2- ما نظام التذبذبات في الدارة؟

3.2- ما دور ثنائي القطب D في الدارة؟

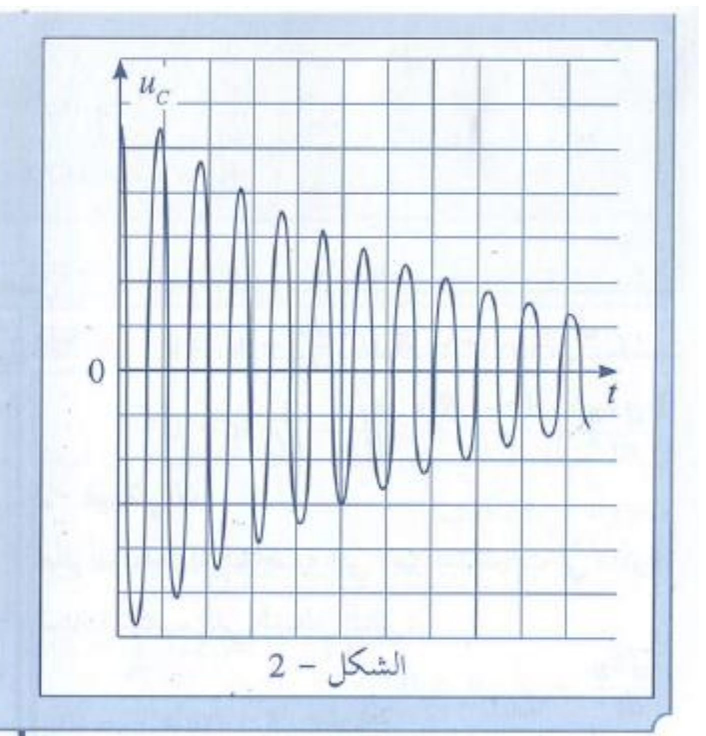
3- نعطي لـR_0 قيمة $R_0\neq R$.

1.3- بيّن أن الطاقة الكلية E المخزونة في ثنائي القطب LC تحقق العلاقة التالية: $\frac{d\mathcal{E}}{dt}=-A.i^2$

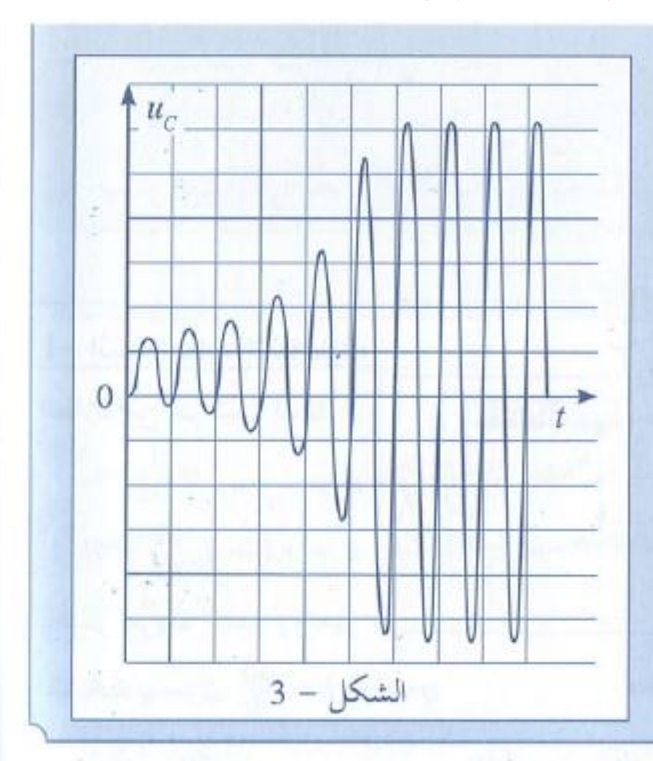
ماذا تستنتج في الحالة $R_0=R$؟

2.3- نضبط R_0 على التوالي على قيمة R_1 بحيث $R_1<R$ ثم على R_2 بحيث $R_2>R$، فنحصل على التوالي على منحنيي الشكلين (2) و(3).

أعط تفسيرا طاقيا لهيأة كل منحنى.



الشكل - 2



الشكل - 3

الحل

1- إثبات المعادلة التفاضلية:

نطبق على الدارة قانون إضافية التوترات:

$u_C+u_B+u_D=0$

ولدينا:

- بالنسبة للوشيعة: $u_B = Ri + L.\frac{di}{dt}$
- وبالنسبة لـ D: $u_D=-R_0 i$

إذن: $u_c + R.i + L.\frac{di}{dt} - R_0 i = 0$

وحسب تعبير توتر المكثف: $q=C.u_c$

ومنه: $i = \frac{d(C.u_c)}{dt} = C\frac{du_c}{dt}$

و $\frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u_c}{dt}$

إذن: $u_c + (R - R_0).C.\dot{u}_c + L.C.\ddot{u}_c = 0$

وبالتالي: $u_c + A.C.\dot{u}_c + L.C.\ddot{u}_c = 0$

حيث: $A=R-R_0$

1.2- قيمة A:

عند ضبط R_0 على قيمة R فإن $A=0$

2.2- نظام التذبذبات:

باعتبار النتيجة $A=0$ فإن المعادلة التفاضلية تكتب كالتالي:

$u_c + L.C.\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$

وهي معادلة تفاضلية ذات حل جيبي، إذن: نظام التذبذبات نظام دوري وجيبي.

3.2- دور ثنائي القطب D:

يعوض الطاقة المبددة بمفعول جول.

1.3- إثبات تعبير $\frac{d\mathscr{E}}{dt}$:

نعبر عن الطاقة المخزونة في ثنائي القطب LC كالتالي:

$\mathscr{E} = \mathscr{E}_e + \mathscr{E}_m = \frac{1}{2}C.u_c^2 + \frac{1}{2}L i^2$

إذن: $\frac{d\mathscr{E}}{dt} = \frac{1}{2}.C.2u_c.\dot{u}_c + \frac{1}{2}L.2i.\frac{di}{dt}$

ولدينا: $i = \frac{dq}{dt} = c.\frac{duc}{dt} = c.\dot{u}_c$

إذن: $c.\dot{u}_c = i$

و: $\frac{di}{dt} = c.\ddot{u}_c$

نعوض $\frac{di}{dt}$ و $c.\dot{u}_c$:

$$\frac{d\mathscr{E}}{dt} = c.u_c.\dot{u}_c + L.i.c.\ddot{u}_c$$

$$= u_c.i + LC.i.\ddot{u}_c = i(u_c + LC.\ddot{u}_c)$$

بالرجوع إلى المعادلة التفاضلية حسب السؤال 1 نكتب:

$u_c + L.C.\ddot{u}_c = - AC.\dot{u}_c$

يعني: $u_c + L.C\,\ddot{u}_c = - A.i$

وبالتالي: $\frac{d\mathscr{E}}{dt} = - A.i^2$

استنتاج:

لدينا: $A=R-R_0$

عندما يتم ضبط R_0 على القيمة R فإن: $A=0$

ومنه: $\frac{d\mathscr{E}}{dt} = 0$

ويعني ذلك أن طاقة الدارة LC تبقى ثابتة بفضل دور جهاز الصيانة D.

2.3- تحليل المنحنيين:

- إذا كان $R_0 = R_1 < R$ فإن: $A = R - R_0 > 0$

ومنه: $\frac{d\mathscr{E}}{dt} < 0$

وبالتالي تكون الطاقة المخزونة في الدارة دالة تناقصية بدلالة الزمن بحيث تكون الطاقة المبددة بمفعول جول أكبر من الطاقة التي يمنحها جهاز الصيانة (D).

وهو ما يؤدي إلى انخفـــاض التوتر القصوي للمكثف (الشكل - 2).

- إذا كان $R_0 = R_2 > R$: فإن: $A = R - R_0 < 0$

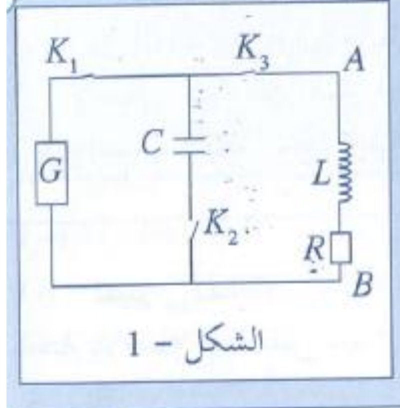
ومنه: $\frac{d\mathscr{E}}{dt} > 0$

الطاقـــة المخزونة في الدارة دالـــة تزايدية بدلالة الزمن (الشـــكل - 3)، وللحصول على ذلك يجب أن تكون الطاقة الممنوحة من طرف جهاز الصيانة (D) أكبر من الطاقة المبددة بمفعول جول.

التمرين 12

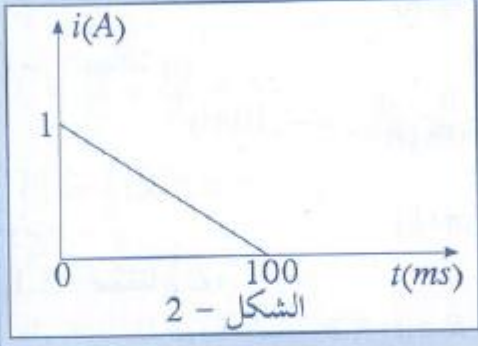
ننجز التركيب المبين في الشكل - 1 والمشتمل على:

- وشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها مهملة.
- مولد كهربائي G. - موصل أومي مقاومته $R = 2\Omega$
- مكثف سعته $C=0,1\mu F$. - ثلاثة قواطع للتيار K_1 و K_2 و K_3.



الشكل - 1

1- نغلق القاطعين K_1 و K_3 ونترك K_2 مفتوحا. يزود المولد الدارة بتيار شدته تتغير مع الزمن كما يبين الشكل - 2.



الشكل - 2

1.1- بين أن التوتر u_{AB} دالة تآلفية مع الزمن.

2.1- استنتج قيمة المعامل L لكي يكون التوتر u_{AB} منعدما في لحظة تاريخها $t_1=50ms$.

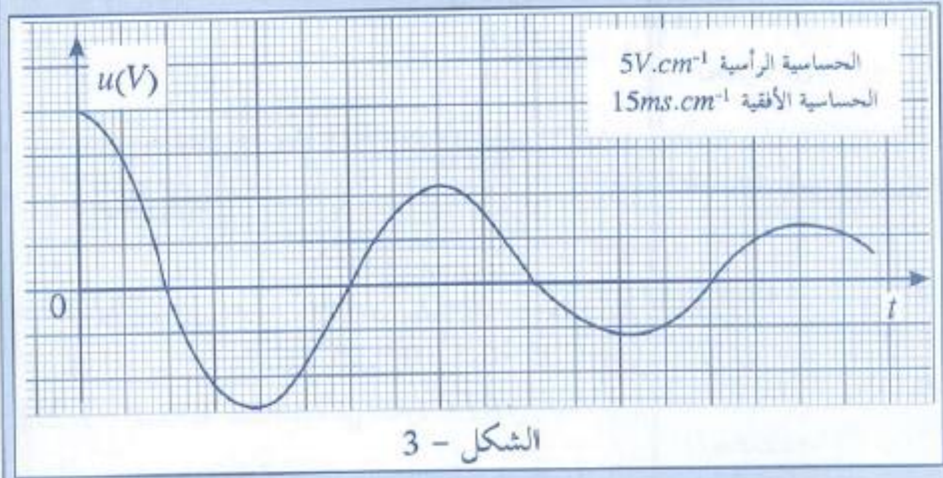
2- نفتـــح القواطع من جديد، ونعوض المولد الســـابق، بمولد آخر يزود الدارة بتيار مستمر قوته الكهرمحركة $E=10V$ ومقاومته الداخلية مهملة، حيث نربط قطبه الموجب بطرف القاطع K_1.

نغلق K_1 و K_2 وبعد لحظات نفتح K_1.

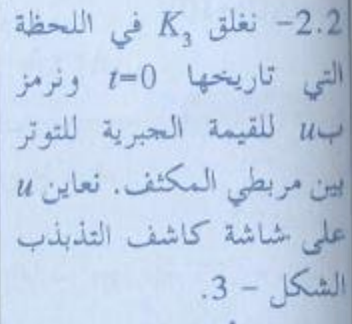
1.2- ما قيمة الشحنة الكهربائية Q_0 التي يختزنها اللبوس الأعلى للمكثف؟

2.2- نغلق K_3 في اللحظة التي تاريخها $t=0$ ونرمز بـ u للقيمة الجبرية للتوتر بين مربطي المكثف. نعاين u على شاشة كاشف التذبذب الشكل - 3.

1.2.2- أوجـــد المعادلـــة التفاضلية التي يحققها التوتر u.



الشكل - 3



2.2.2- نعطي حل المعادلة التفاضلية المحصل عليها:

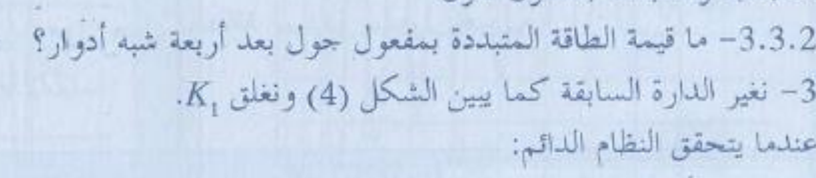
$$u(t) = U_0 e^{-\lambda t}\cos(\omega t + \varphi) \text{ مع } \lambda = \frac{R}{2L}$$

استنتج مبيانيا القيم U_0 و ω و φ.

3.2- نرمز ب E_0 للطاقة الكهربائية الكلية المختزنة في الدارة في بداية التذبذب الأول ($t=0$) وب E_1 و E_2 و... و E_n الطاقات الكلية المختزنة في الدارة على التوالي في التواريخ: $t_1=T$ و $t_2=2T$ و... و $t_n=nT$.

1.3.2- احسب E_0 و E_1 و E_2.

2.3.2- بين أن: $\frac{E_n}{E_0} = (r)^n$، حيث تمثل r كسراً من الطاقة الكهربائية الكلية المختزنة في الدارة في بداية التذبذب والمتبددة بمفعول جول.



3.3.2- ما قيمة الطاقة المتبددة بمفعول جول بعد أربعة شبه أدوار؟

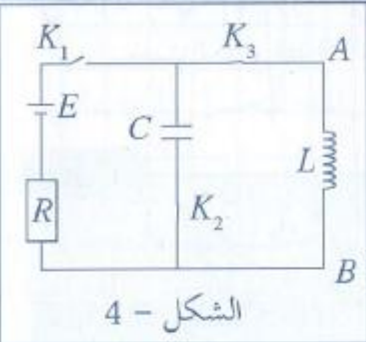
3- نغير الدارة السابقة كما يبين الشكل (4) ونغلق K_1.

عندما يتحقق النظام الدائم:

1.3- بين أن التوتر u_{AB} بين مربطي الوشيعة منعدما.

2.3- احسب شدة التيار المار في كل من الوشيعة والمكثف.

3.3- احسب الطاقة المختزنة في كل من الوشيعة والمكثف.



الشكل - 4

الحـل

1.1- تعبير U_{AB}:

باعتبار الاصطلاح مستقبل لدينا:

$$u_{AB} = u_L + u_R$$
$$= L.\frac{di}{dt} + Ri$$

ومن المبيان:

$i=f(t)=at+b$

$$\frac{di}{dt} = a = \frac{0-1}{100.10^{-3}} = -10A/s$$

$b = 1A$

ومنه:

$u_{AB}=L.a+R(at+b)$

2.1- استنتاج L:

$u_{AB}=0=L.a+R.a.t+R.b$

$$L = -\frac{R.a.t - Rb}{a}$$

$$L = R\left(-\frac{b}{a} - t\right)$$

$$L = 2\left(-\frac{1}{-10} - 0,05\right) = 0,1\,H$$

1.2- قيمة Q_0:

نعلم أن: $q=C.U$

عند نهاية الشحن يصبح $U=E$ و $q=Q_0$

$Q_0=C.E=0,1.10^{-6}.10=10^{-6}C$

1.2.2- المعادلة التفاضلية في الدارة RLC:

لدينا: $u+u_L+u_R=0$

إذن:

$$u + L.\frac{di}{dt} + Ri = 0$$

ونعلم أن:

$$i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du}{dt}$$

إذن:

$$u + L.C\frac{d^2u}{dt} + R.C.\frac{du}{dt} = 0$$

أو:

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}.\frac{du}{dt} + u = 0$$

2.2.2- تحديد U_0، ω، φ:

من المبيان لدينا: $U(0)=10V$

وباعتبار الشروط البدئية عند إغلاق الدارة: $U=E$

إذن: $E=U(0)=10V$

– تحديد ω:

$u(t)=u(t+T)$

التذبذبات شبه دورية: دورها T هو: $T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

من المبيان: $T=4cm.15.ms.cm^{-1}=60ms$

$T=6.10^{-2}s$

$$\omega = \frac{2\pi}{6.10^{-2}} = \frac{100\pi}{3}\,rad/s$$

– تحديد φ:

نعتبر الدالة $u(t)$: $u(t) = U_0.e^{-\lambda t}.\cos(\omega.t + \varphi)$

عند $t=0$:

$$U(0) = U_0.e^{-\lambda o}.\cos\varphi$$

$$U_0 = U_0 \cos\varphi$$

$$\cos\varphi = 1$$

وبما أن: $-2\pi \le \varphi \le 2\pi$

فإن: $\varphi = 0$

2.3.1- حساب E_0، E_1، E_2:

عند اللحظة $t=0$، توجد طاقة الدارة مخزونة كليا في المكثف، إذن:

$$E_0 = \mathscr{E}_e(t=0) = \frac{1}{2}CU_0^2$$

ت.ع:

$$E_0 = \frac{1}{2}.10^{-7}.10^2 = 5.10^{-6}J$$

بعد كل شبه دور توجد طاقة الدارة مخزونة في المكثف فقط.

مبيانيا:

$$u_1=5,5V$$

$$E_1 = \frac{1}{2}.C.U_1^2$$

ت.ع:

$$E_1 = \frac{1}{2}.10^{-7}.(5,5)^2 = 1,525.10^{-6}J$$

عند $t=2T$:

$$U_2=3V$$

$$-E_2 = \frac{1}{2}.CU_2^2 = 0,45.10^{-6}J$$

2.3.2- تبيين العلاقة $\frac{E_n}{E_0} = (r)^n$:

انطلاقا من النتائج السابقة:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1,525}{5} \simeq 0,3$$

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{0,45}{1,525} \simeq 0,3$$

يمكن أن نضع $r=0,3$ وهي نسبة ثابتة يمكن تعميمها بحيث:

$$\frac{E_n}{E_{n-1}} = r$$

$$E_n = r.E_{n-1} = r^2 E_{n-2}$$

$$E_n = r^3 E_{n-3} = ... = r^n E_0$$

ومنه:

$$\frac{E_n}{E_0} = r^n$$

3.3.2- قيمة الطاقة المتبددة:

بعد أربعة شبه أدوار:

$$E_4 = E_0.r^4$$

إذن الطاقة المتبددة هي ΔE بحيث:

$$\Delta E = E_4 - E_0 = E_0(r^4 - 1)$$

$$\Delta E = 5.10^{-6}((0,3)^4 - 1)$$

$$\Delta E \simeq -4,96.10^{-6}J$$

3.1- التوتر u_{AB}:

في النظام الدائم: $i=cte$

إذن:

$$u_{AB} = L.\frac{di}{dt} = 0$$

3.2- شدة التيار:

لدينا بالنسبة للمكثف

$$i_C = \frac{dq}{dt} = c.d\frac{u_C}{dt}$$

$$U_C=U_L=0$$

$U_C=0$ تعتبر قيمة ثابتة: مشتقها منعدمة.

إذن: $i_C=0$، وبالتالي لا يمر أي تيار في المكثف

حسب قانون العقد:

$$I_0=i_c+i_L=0+i_L$$

$i_L=I_0$ وباعتبار الفرع (E,R)

$$E-R\,I_0=U_C=0$$

$$I_0 = \frac{E}{R}$$

إذن:

$$i_L = \frac{E}{R} = \frac{10}{2} = 5A$$

3.3- الطاقة المخزونة:

- في المكثف:

$$\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}CU_c^2 = 0$$

- في الوشيعة:

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}.LI_0^2$$

ت.ع:

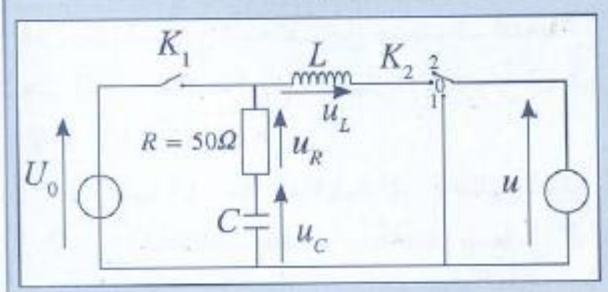
$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}.0,1.(5)^2$$

$$\mathscr{E}_m = 1,25J$$

التمرين 13

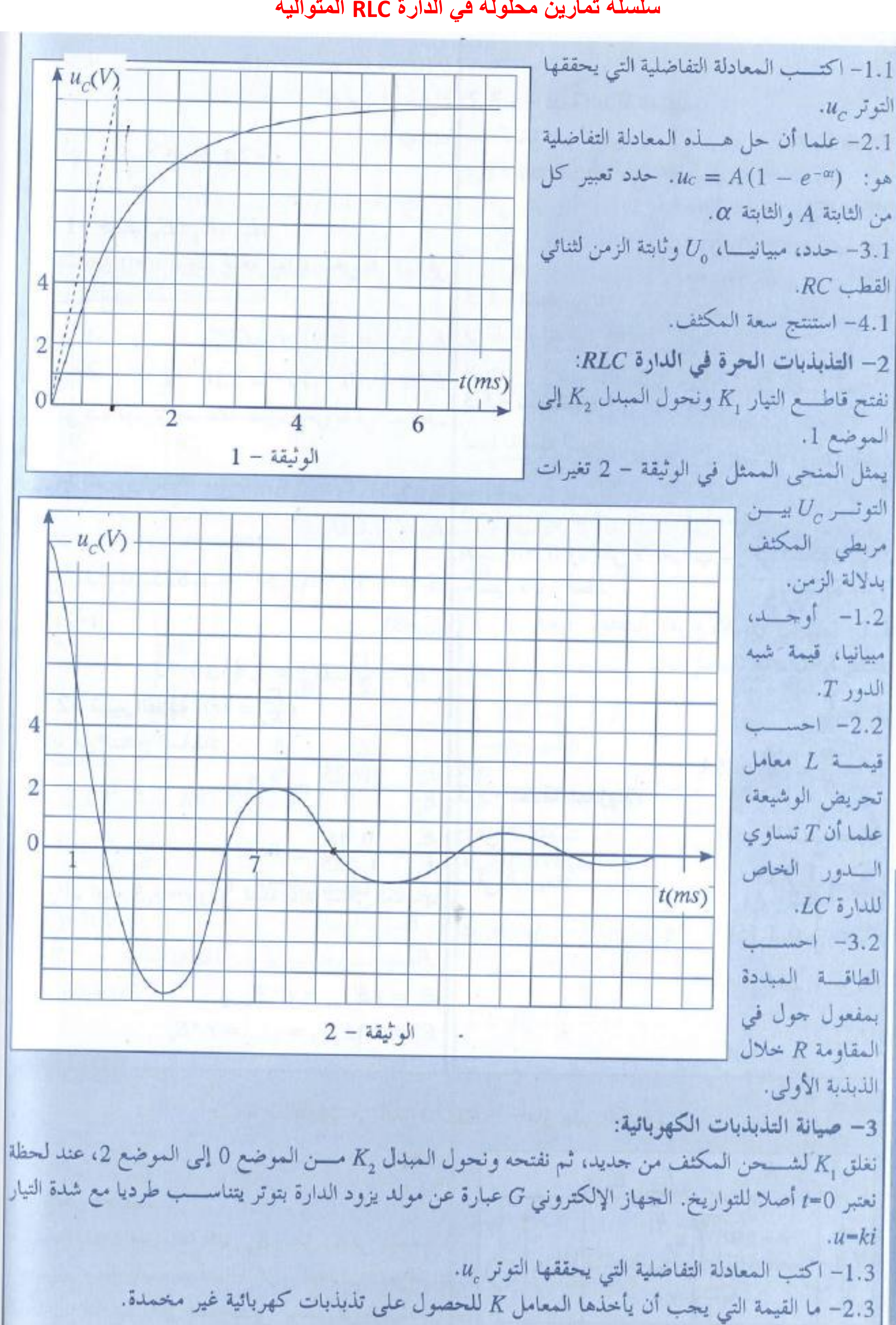
صيانة التذبذبات في الدارة RLC - جهاز بيانو إلكتروني

ننجز التركيب الممثل جانبه:



1- شحن مكثف:

عند لحظة $t=0$ نغلق قاطع التيار K_1 ونبقي K_2 في الموضع 0، ونعاين بواسطة راسم تذبذب ذاكرتي التوتر u_C بين مربطي المكثف، فنحصل على المنحنى الممثل في الوثيقة - 1.



الوثيقة – 1

الوثيقة – 2

1.1– اكتب المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C.

2.1– علما أن حل هذه المعادلة التفاضلية هو: $u_C = A(1 - e^{-\alpha t})$. حدد تعبير كل من الثابتة A والثابتة α.

3.1– حدد، مبيانيا، U_0 وثابتة الزمن لثنائي القطب RC.

4.1– استنتج سعة المكثف.

2– التذبذبات الحرة في الدارة RLC:

نفتح قاطع التيار K_1 ونحول المبدل K_2 إلى الموضع 1.

يمثل المنحنى الممثل في الوثيقة – 2 تغيرات التوتر U_C بين مربطي المكثف بدلالة الزمن.

1.2– أوجد، مبيانيا، قيمة شبه الدور T.

2.2– احسب قيمة L معامل تحريض الوشيعة، علما أن T تساوي الدور الخاص للدارة LC.

3.2– احسب الطاقة المبددة بمفعول جول في المقاومة R خلال الذبذبة الأولى.

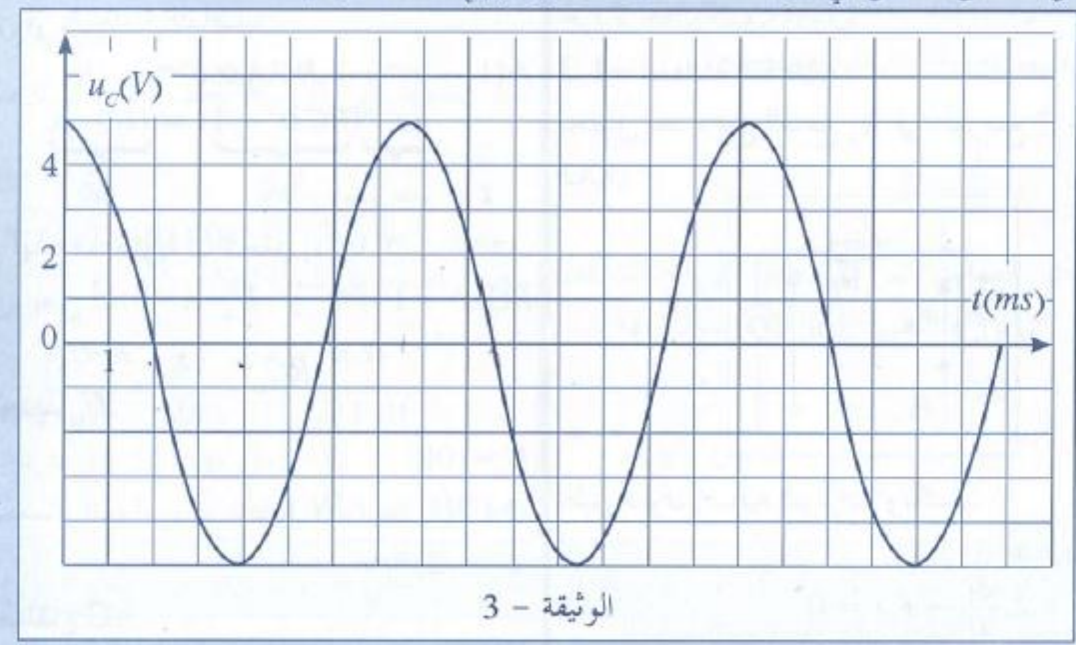
3– صيانة التذبذبات الكهربائية:

نغلق K_1 لشحن المكثف من جديد، ثم نفتحه ونحول المبدل K_2 من الموضع 0 إلى الموضع 2، عند لحظة نعتبر $t=0$ أصلا للتواريخ. الجهاز الإلكتروني G عبارة عن مولد يزود الدارة بتوتر يتناسب طرديا مع شدة التيار $u=ki$.

1.3– اكتب المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_c.

2.3– ما القيمة التي يجب أن يأخذها المعامل K للحصول على تذبذبات كهربائية غير مخمدة.

3.3– يمثل المنحنى الممثل في الوثيقة – 3 تغيرات التوتر $u_c(t)$ بدلالة الزمن.



الوثيقة – 3

اكتب التعبير للتوتر u_C بدلالة الزمن.

4– إنجاز جهاز بيانو إلكتروني:

نريد محاكاة جهاز بيانو إلكتروني يصدر ثلاثة نوتات موسيقية بواسطة التركيب الممثل أسفله:

HP: مكبر الصوت

R: موصل أومي مقومته R

G: مولد يزود الدارة بتوتر $U=k.i$ مع $k=R$.

$C_1=2,08\mu F$ ؛ $C_2=1,65\mu F$

$C_3=1,31\mu F$ ؛ $L=100mH$

K_1 و K_2 و K_3 قواطع للتيار

حدد النوتات الموسيقية التي يمكن أن يصدرها هذا التركيب عندما نضغط على K_1 أو K_2 أو K_3.

يعطي الجدول التالي تردد النوتات الموسيقية التي يمكن لهذا الجهاز أن يصدرها:

النوتة	Do	Ré	Mi	Fa	Sol	La	Si
التردد (Hz)	262	294	330	349	392	440	494

الحـل

1– شحن المكثف:

1.1– المعادلة التفاضلية خلال الشحن:

نكتب باستعمال قانون إضافية التوترات: $U_0=u_R+u_C$

وحيث إن: $u_R=Ri$ و $i=\frac{dq}{dt}$ و $q=C.u_C$

فإن: $u_R=R.\frac{dq}{dt}=RC.\frac{du_c}{dt}$

وبالتالي: $U_0=RC.\frac{du_c}{dt}+u_c$

أو: $u_c+RC.\frac{du_c}{dt}=U_0$

2.1– تحديد الثابتتين A و α:

لدينا الدالة الحل للمعادلة التفاضلية السابقة:

$u_c=A(1-e^{-\alpha t})$

إذن: $\frac{du_c}{dt} = A.\alpha.e^{-\alpha t}$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية:

$$A(1 - e^{-\alpha t}) + RC.A.\alpha.e^{-\alpha t} = U_0$$

$$\underbrace{Ae^{-\alpha t}}_{\text{مقدار متغير مع } t}\underbrace{(RC.\alpha - 1)}_{\text{ثابتة}} = \underbrace{U_0 - A}_{\text{ثابتة}}$$

لا يمكن لهذه المتساوية أن تتحقق إلاّ إذا كانت الثابتتان منعدمتين، يعني أن: $U_0 - A = 0$ و $RC.\alpha - 1 = 0$

إذن: $A = U_0$ و $\alpha = \frac{1}{RC}$

3.1- تحديد U_0:

مبيانياً: $U_0 = 10V$

نجد باستعمال المماس، أو باعتبار الأرتوب $0,63U_0$: $\tau \simeq 2,5ms$

4.1- استنتاج C:

من تعبير ثابتة الزمن، حيث: $\tau = RC$

نستنتج أن: $C = \frac{\tau}{R}$

ت.ع: $C = \frac{2,5.10^{-3}}{50} = 5.10^{-5}F = 50\mu F$

2- التذبذبات الحرة في الدارة RLC:

1.2- شبه الدور:

من منحنى الوثيقة (2) نجد: $T = 7,5ms = 7,5.10^{-3}s$

2.2- تحديد قيمة L:

لدينا: $T = T_0 = 2\pi^2\sqrt{L.C}$

إذن: $L = \frac{T^2}{4\pi^2.C}$

ت.ع: $L = \frac{(7,5)^2.10^{-6}}{4.\pi^2.5.10^{-5}} \simeq 0,28H$

3.2- الطاقة المبددة:

عند اللحظتين $t=0$ و $t=T$ تكون الطاقة المغنطيسية المُخَزَّنَة في الوشيعة منعدمة.

تختزن الدارة عند اللحظة $t=0$ الطاقة المُخَزَّنَة في المكثف:

$$\mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}CU_0^2$$

وتختزن عند اللحظة $t=T$ الطاقة: $\mathscr{E} = \frac{1}{2}C.U_C^2$

إذن تغير الطاقة بمفعول جول في الدارة هو:

$$\Delta\mathscr{E} = \mathscr{E} - \mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}C(U_C^2 - U_0^2)$$

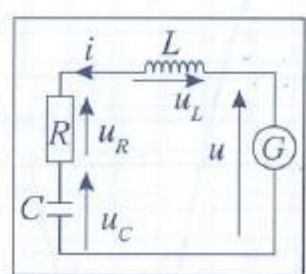
$$\Delta\mathscr{E} = \frac{1}{2}.5.10^{-5}(2^2 - 10^2)$$

$$= -2,4.10^{-3}J = -2,4mJ$$

يضيع من الطاقة المُخَزَّنَة في الدارة $2,4mJ$ على شكل حرارة خلال الدور الأول.

1.3- المعادلة التفاضلية:

نحصل بعد وضع القاطع K_2 في الموضع 2 على الدارة التالية:



نطبق قانون إضافية التوترات ونكتب:

$$u_C + u_R + u_L - u = 0$$

$$u_c + Ri + L.\frac{di}{dt} - K.i = 0$$

$$u_c + (R - K).i + L.\frac{di}{dt} = 0$$

وحيث إنه لدينا: $i = \frac{dq}{dt} = C.\frac{du_c}{dt}$

إذن: $u_c + (R - k)\frac{du_c}{dt} + LC\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$

2.3- قيمة المعامل K:

للحصول على تذبذبات كهربائية دون خمود يجب أن تكون المعادلة التفاضلية هي: $u_c + LC.\frac{d^2u_c}{dt^2} = 0$

مما يعني توفر الشرط: $R - K = 0$

$$K = R = 50\Omega$$

3.3- تعبير $u_c(t)$:

الدالة $u_c(t)$ دالة جيبية وتكتب على الشكل التالي:

$$u_c = U_{Cmax}\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.t + \varphi\right)$$

مبيانياً: $U_{Cmax} = 10V$

$T_0 = 7,5.10^{-3}s$

نحدد الزاوية φ باعتبار اللحظة $t=0$

$$u_c(t=0) = U_{Cmax}.\cos\left(\frac{2\pi}{T_0}.0 + \varphi\right)$$

$$= U_{Cmax}.\cos\varphi$$

$$\cos\varphi = \frac{u_c(t=0)}{U_{Cmax}} = \frac{10}{10} = 1$$

$$\varphi = 0, 2\pi, 4\pi, ...$$

نعتبر أصغر قيمة للزاوية φ فنأخذ $\varphi = 0$

$$u_c(t) = 10\cos\left(\frac{2\pi}{7,5.10^{-3}}t\right) = 10.\cos 837t$$

4- إنجاز جهاز البيانو:

نعلم أن الدارة RLC المَصُونة تكون مقراً لتذبذبات كهربائية جيبية دورية ترددها الخاص هو:

$$f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$$

يمكننا مكبر الصوت المركب بالتوازي مع المكثف من تحويل التوتر u_c الجيبي إلى إشارة صوتية لها نفس التردد.

- الدارة LC_1:

$$f_{01} = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC_1}}$$

$$f_{01} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,1.2,08.10^{-6}}}$$

$$f_{01} \simeq 349,15Hz$$

عند الضغط على الزر K_1 نحصل على النوتة Fa

- الدارة LC_2:

$$f_{02} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C_2}}$$

$$f_{02} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,1.1,65.10^{6}}} \simeq 392Hz$$

وهو تردد مطابق للنوتة Sol

- الدارة LC_3:

$$f_{03} = \frac{1}{2\pi\sqrt{L.C_3}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{0,1.1,31.10^{-6}}}$$

$$f_{03} = 439,96Hz \simeq 440Hz$$

وهو ما يوافق النوتة La.

التمرين 14

نقوم بشحن مكثف سعته $C=0,5\mu F$ تحت توتر U_0، ثم نفرغه في ثنائي قطب يتكون من موصل أومي مقاومته R ووشيعة معامل تحريضها $L=0,5H$ ومقاومتها مهملة.

باستعمال وسيط معلوماتي نحصل على الوثيقة جانبه والتي تتكون من:

- المنحنى الممثل لتغيرات الشحنة q للمكثف بدلالة الزمن.
- المنحنى الممثل لتغيرات E_{mag} الطاقة المغنطيسية المخزونة في الوشيعة بدلالة الزمن.

1- أوجد المعادلة التفاضلية التي تحققها الشحنة q للمكثف.

2- ما طبيعة التذبذبات؟ علل جوابك.

3- حدد قيمة U_0.

4- حدد عند اللحظة $t_1=2,4ms$ (انظر الشكل) قيمة الطاقة الكلية E_1 للدارة.

5- حدد عند اللحظة $t_2=9,5ms$ قيمة الطاقة الكلية E_2 للدارة.

6- نقبل العلاقة التالية: $\frac{E_2}{E_1} = e^{-\frac{R}{L}(t_2-t_1)}$ (علاقة صالحة بالنسبة للخمود الضعيف).

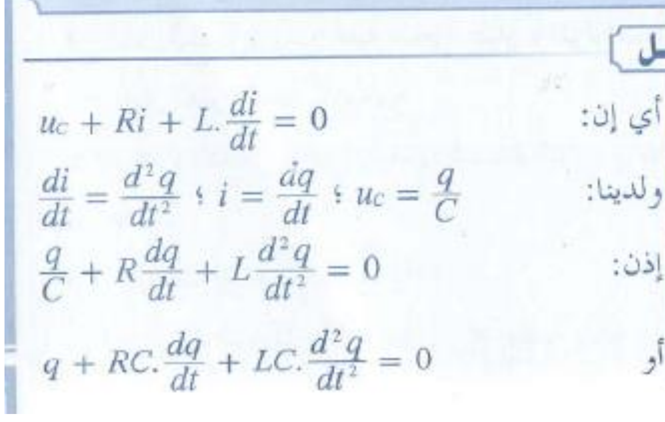
حدد قيمة المقاومة R للموصل الأومي.

الحل

1- المعادلة التفاضلية للتذبذبات:

نكتب، انطلاقاً من الدارة الممثلة في الشكل جانبه، حسب قانون إضافية التوترات:

$u_C+u_R+u_L=0$



أي إن:

$$u_C + Ri + L.\frac{di}{dt} = 0$$

ولدينا:

$$u_C = \frac{q}{C} \text{ ؛ } i = \frac{dq}{dt} \text{ ؛ } \frac{di}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2}$$

إذن:

$$\frac{q}{C} + R\frac{dq}{dt} + L\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

أو

$$q + RC.\frac{dq}{dt} + LC.\frac{d^2q}{dt^2} = 0$$

2- طبيعة التذبذبات:

تتغير الشحنة $q(t)$، وكذلك التوتر $u_C(t)$، مع الزمن حسب دالة جيبية مخمدة.

إذن: الدارة مقر لتذبذبات كهربائية شبه دورية.

3- تحديد قيمة U_0:

الشحنة البدئية للمكثف حسب المبيان $q(t)$ هي:

$q_0=2,5\mu C$

إذن التوتر البدئي للمكثف هو:

$$U_0=\frac{q_0}{C}=\frac{2,5.10^{-6}}{0,5.10^{-6}}=5V$$

4- تحديد الطاقة E_1:

تختزن الدارة عند اللحظة t_1، الطاقة E_1، بحيث:

$E_1=E_{e(1)}+E_{m(1)}$

عند اللحظة t_1 لدينا: $q=0$ حسب المبيان $q(t)$.

إذن: $E_{e(1)}=0$

وحسب المبيان E_{mag} نقرأ: $E_{m(1)}=5\mu J$

إذن: $E_1=5\mu J=5.10^{-6}J$

5- تحديد الطاقة E_2:

لدينا من الشكل عند اللحظة t_2:

$$E_{2m}=0\Rightarrow E_2=E_{e2}=\frac{1}{2C}q_2^2$$

$$q_2=1,5\mu C=1,5.10^{-6}C$$

إذن:

$$E_2=\frac{1(1,5)^2.10^{-12}}{2.0,5.10^{-6}}=2,25.10^{-6}J$$

6- تحديد R:

لدينا من المعطيات العلاقة:

$$\frac{E_2}{E_1}=e^{-\frac{R}{L}(t_2-t_1)}$$

ومنه:

$$\frac{E_1}{E_2}=e^{\frac{R}{L}(t_2-t_1)}$$

باستعمال ln نكتب:

$$Ln\frac{E_1}{E_2}=\frac{R}{L}(t_2-t_1)$$

إذن:

$$R=\frac{L}{t_2-t_1}Ln\frac{E_1}{E_2}$$

$$R=\frac{0,5}{(9,5-2,4).10^{-3}}Ln\frac{5.10^{-6}}{2,25.10^{-6}}\simeq 56\Omega$$

التمرين 15

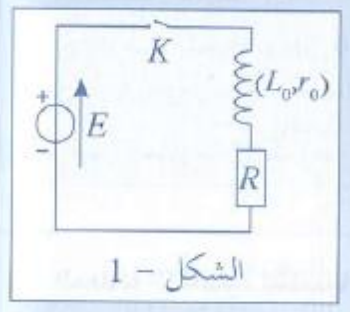
يتطرق هذا التمرين إلى نمذجة إحدى الدارات الكهربائية المعتمدة في سيارة "Dacia-Logan" تم تصنيعها من طرف المصنع الفرنسي "Renault"، وتم إنتاجها في البداية في رومانيا وحاليا في المغرب. رغم أن ثمن السيارة غير مرتفع، إلا أنه تم تزويد محرك السيارة بأحدث التقنيات. تعتبر الوشيعة من بين أهم المركبات الكهربائية التي تدخل في تركيب جهاز التحكم في صبيب الوقود.



لمعرفة خصائص جهاز التحكم في صبيب الوقود المستعمل في سيارة "Logan" قام بعض تقنيي مختبر شركة منافسة بدراسة مميزات الوشيعة المستعملة في جهاز التحكم.

1- الدراسة التوقعية:

في البداية اختار التقنيون وشيعة معامل تحريضها L_0 ومقاومتها الداخلية r_0، وأنجزوا التركيب التجريبي الممثل في الشكل - 1.



الشكل - 1

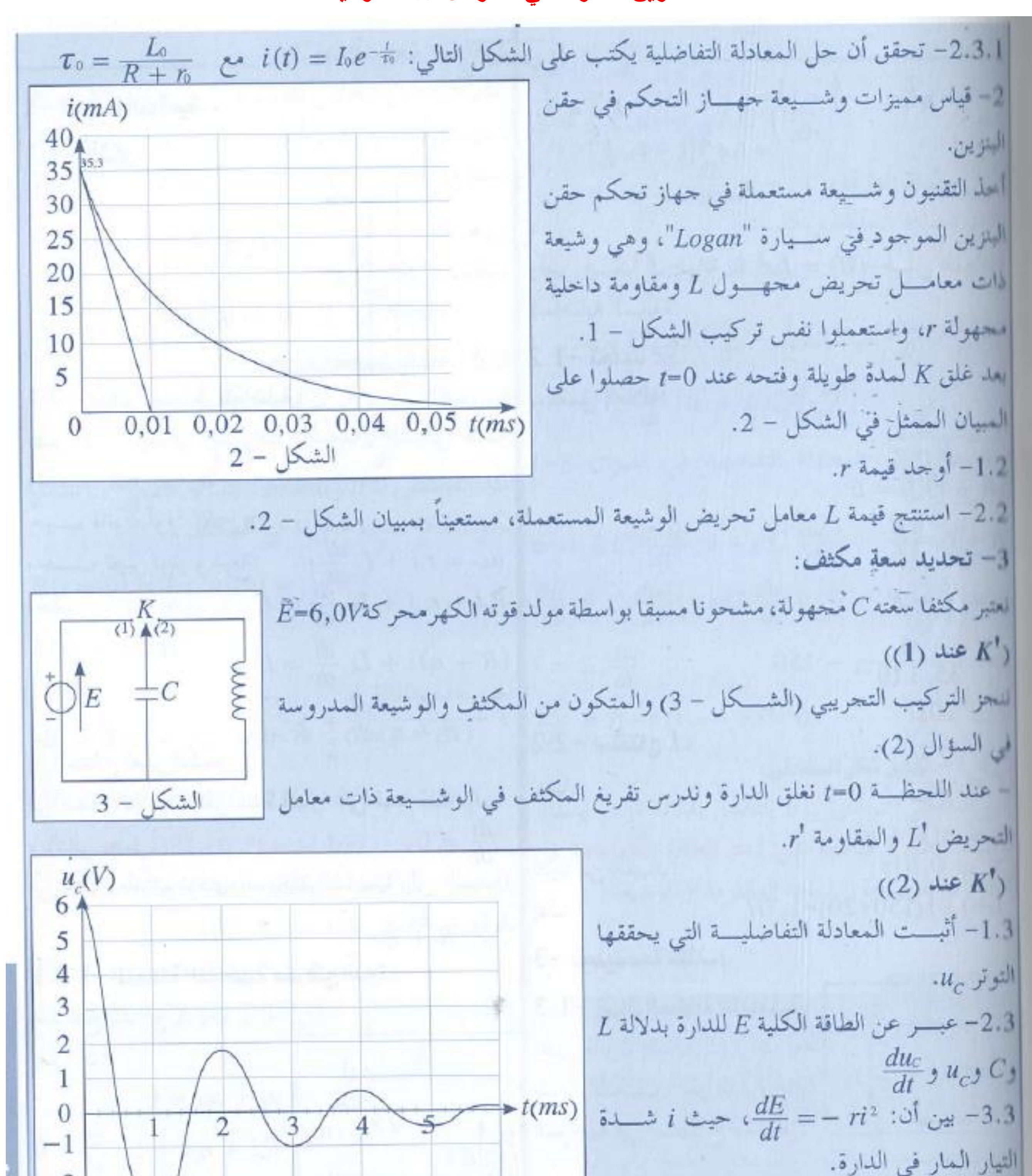
1.1- انقل الشكل، وبين عليه منحى التيار والتوترات في اصطلاح مستقبل.

2.1- نغلق الدارة لمدة كافية.

أثبت المعادلة التفاضلية التي تحققها شدة التيار. واستنتج تعبير I_0 شدة التيار في النظام الدائم.

3.1- نفتح الدارة عند اللحظة $t=0$.

1.3.1- أوجد المعادلة التفاضلية التي تحققها شدة التيار i.



2.3.1- تحقق أن حل المعادلة التفاضلية يكتب على الشكل التالي: $i(t) = I_0 e^{-\frac{t}{\tau_0}}$ مع $\tau_0 = \frac{L_0}{R + r_0}$

2- قياس مميزات وشيعة جهاز التحكم في حقن البنزين.

أحد التقنيون وشيعة مستعملة في جهاز تحكم حقن البنزين الموجود في سيارة "Logan"، وهي وشيعة ذات معامل تحريض مجهول L ومقاومة داخلية مجهولة r، واستعملوا نفس تركيب الشكل – 1.

بعد غلق K لمدة طويلة وفتحه عند $t=0$ حصلوا على البيان الممثل في الشكل – 2.

1.2- أوجد قيمة r.

2.2- استنتج قيمة L معامل تحريض الوشيعة المستعملة، مستعيناً ببيان الشكل – 2.

3- تحديد سعة مكثف:

نعتبر مكثفا سعته C مجهولة، مشحونا مسبقا بواسطة مولد قوته الكهرمحركة $E=6,0V$ (عند K' (1))

ننجز التركيب التجريبي (الشكل – 3) والمتكون من المكثف والوشيعة المدروسة في السؤال (2).

– عند اللحظة $t=0$ نغلق الدارة وندرس تفريغ المكثف في الوشيعة ذات معامل التحريض L' والمقاومة r'.

(عند K' (2))

1.3- أثبت المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C.

2.3- عبر عن الطاقة الكلية E للدارة بدلالة L و C و u_C و $\frac{du_C}{dt}$

3.3- بين أن: $\frac{dE}{dt} = -ri^2$، حيث i شدة التيار المار في الدارة.

4.3- عندما نرجع K' إلى الموضع 2 نعاين بواسطة راسم التذبذب ذي ذاكرة التوتر بين مربطي المكثف فنحصل على المنحنى الشكل – 4.

1.4.3- علل شكل المنحنى المحصل عليه.

2.4.3- علما أن شبه الدور في هذه التجربة يساوي الدور الخاص للدارة.

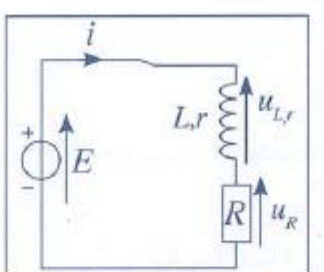
حدد قيمة سعة المكثف المدروس.

5.3- احسب الطاقة المبددة بمفعول جول في الدارة بين اللحظتين $t=0$ و $t=3ms$.

الحــل

1- الدراسة التوقعية:

1.1- الشكل:



2.1- إثبات المعادلة التفاضلية:

نطبق قانون إضافية التوترات باستعمال الشكل جانبه ونكتب: $u_R+u_{L,r}=E$

حسب قانون أوم: $u_R=Ri$

وحسب تعبير توتر وشيعة: $u_{L,r} = r.i + L.\frac{di}{dt}$

نجد: $R.i + r_0.i + L_0.\frac{di}{dt} = E$

$$(R + r_0)i + L_0.\frac{di}{dt} = E$$

$$i + \frac{L}{R + r_0}.\frac{di}{dt} = \frac{E}{R + r_0}$$

- استنتاج تعبير الشدة I_0:

في النظام الدائم تستقر شدة التيار على قيمة ثابتة I_0.

وبالتالي يصير: $\frac{di}{dt} = 0$

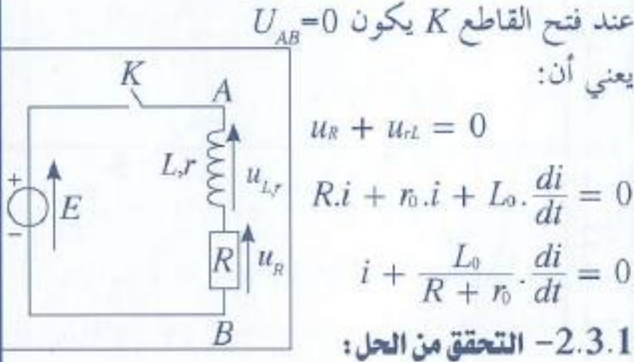
في النظام الدائم تؤدي المعادلة التفاضلية إلى النتيجة:

$$I_0 = \frac{E}{R + r_0}$$

1.3.1- المعادلة التفاضلية عند فتح الدارة:

عند فتح القاطع K يكون $U_{AB}=0$

يعني أن:



$$u_R + u_{rL} = 0$$

$$R.i + r_0.i + L_0.\frac{di}{dt} = 0$$

$$i + \frac{L_0}{R + r_0}.\frac{di}{dt} = 0$$

2.3.1- التحقق من الحل:

لدينا حسب المعطيات: $i = I_0e^{-\frac{t}{\tau}}$ حيث:

$$\tau_0 = \frac{L_0}{R + r_0}$$

إذن: $\frac{di}{dt} = -\frac{I_0}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}}$

نعوض i و $\frac{di}{dt}$ في المعادلة التفاضلية السابقة ونكتب:

$$I_0.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{L_0}{R + r_0}.\left(-\frac{I_0}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau_0}}\right) = I_0.e^{-\frac{t}{\tau_0}} + \left(1 + \frac{L_0}{R + r_0}.\frac{t}{\tau_0}\right)$$

$$= I_0.e^{-\frac{t}{\tau}}\left(1 - \tau_0.\frac{t}{\tau_0}\right)$$

$$= I_0.e^{-\frac{t}{\tau_0}}(1 - 1) = 0$$

ويبين هــذا أن الدالة $i(t) = I_0e^{-\frac{t}{\tau_0}}$ حــل للمعادلة التفاضلية السابقة.

1.2- تحديد r:

نستعمل العلاقة:

$$I_0 = \frac{E}{R + r}$$

$$(R + r).I_0 = E$$

$$R + r = \frac{E}{I_0}$$

$$r = \frac{E}{I_0} - R$$

$$r = \frac{6}{35,3.10^{-3}} - 150$$

$$r \simeq 20\Omega$$

2.2- استنتاج L:

لدينا: $\tau = \frac{L}{R + r'}$

$$L = \tau(R + r)$$

لدينا من المبيان: $\tau \simeq 0,01s$

إذن: $L=0,01(150+20)=1,7H$

3- تحديد سعة مكثف:

1.3- إثبات المعادلة التفاضلية:

نطبق قانون إضافية التوترات بعد شحن المكثف وغلق الدارة جانبه الموجهة في اصطلاح مستقبل:

$$u_C + u_{L,r} = 0$$

$$u_{L,r} = ri + L.\frac{di}{dt}$$

$$\frac{di}{dt} = C.\frac{d^2u_C}{dt}$$

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{d(Cu_C)}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}$$

$$u_C + r.C.\frac{du_C}{dt} + L.C.\frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$$

2.3- تعبير الطاقة E:

$$E = E_e + E_m = \frac{1}{2}C.u_C^2 + \frac{1}{2}L.i^2$$

ولدينا: $i = C.\frac{du_C}{dt}$

إذن: $E = \frac{1}{2}.C.u_C^2 + \frac{1}{2}L.C^2\left(\frac{du_C}{dt}\right)^2$

3.3- إثبات العلاقة: $\frac{dE}{dt} = -r.i^2$

نشتق العبارة السابقة ونكتب:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}C.u_C^2 + \frac{1}{2}L.C^2.\left(\frac{du_C}{dt}\right)^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}C.2.u_C.\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{2}L.C^2.2.\frac{du_C}{dt}.\frac{d^2u_C}{dt^2}$$

$$= C.\frac{du_C}{dt}\left(u_C + L.C.\frac{d^2u_C}{dt^2}\right)$$

وبالرجوع إلى المعادلة التفاضلية في السؤال 3-1 نلاحظ أن:

$$u_C + L.C.\frac{d^2u_C}{dt^2} = -r.C.\frac{du_C}{dt}$$

إذن: $\frac{dE}{dt} = C.\frac{du_C}{dt}\left(-r.C.\frac{du_C}{dt}\right)$

وبما أن: $i = C.\frac{du_C}{dt}$

فإن: $\frac{dE}{dt} = i(-r.i) = -r.i^2 < 0$

3.4.1- تعليل شكل المنحنى:

يبين المنحنى أن التوتر u_C يتناقص بدلالة الزمن بسبب ظاهرة الخمود الناتجة عن تبدد الطاقة الكهربائية في الدارة بمفعول جول نتيجة المقاومة r للوشيعة.

3.4.2- تحديد السعة C:

نعلم أن الدور الخاص للدارة هو: $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

وباعتبار أن شبه الدور للتذبذبات المخمدة يقارب T_0.

نستنتج أن: $2\pi\sqrt{LC} = T$

ومنه: $C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}$

مبيانيا: $T=2ms=2.10^{-3}s$

$$C = \frac{4.10^{-6}}{4.10.1,7} = 5,88.10^{-8}F \simeq 59nF$$

3.5- حساب الطاقة المبددة:

الطاقة الكهربائية المُخزّنة في الدارة

$$E = E_e + E_m = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}LC\frac{du_C^2}{dt}$$

عند اللحظتين $t=0$ و $t=3ms$ لدينا: $\frac{du_C}{dt} = 0$، وبالتالي تكون طاقة الدارة مُخزّنة في المكثف.

$$E(t=0) = \frac{1}{2}C.u_C^2(0) = \frac{1}{2}CE^2$$

$$E(t) = \frac{1}{2}Cu_C^2$$

تعبير هذه الطاقة هو:

$$\Delta E = E(t) - E(t=0) = \frac{1}{2}C(u_C^2 - E^2)$$

$$\Delta E = \frac{1}{2}.59.10^{-9}((-1)^2 - 6^2)$$

$$= -1,032.10^{-6}j = -1mJ$$

يتبدد في الدارة بين اللحظتين $t=0$ و $t=3ms$، بمفعول جول على شكل طاقة حرارية، الطاقة:

$$\mathcal{E}_{th} = |\Delta E| = 1mJ$$

التمرين 16

ننجز دارة كهربائية تتكون من:

- وشيعة معامل تحريضها $L=1H$ ومقاومتها مهملة.
- موصل أومي مقاومته R قابلة للضبط.
- مكثف سعته $C=25\mu F$ مشحون لمدة كافية تحت توتر E.

نغلق الدارة عند لحظة نعتبرها أصلا للتواريخ $t=0$، فيظهر في الدارة تيار شدته i.

1- بين أن المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر $u_C=u$ بين مربطي المكثف يمكن أن تكتب على الشكل التالي:

$$\ddot{u} + 2\lambda.\dot{u} + \omega_0^2.u = 0$$

حيث إن: $\dot{u} = \frac{du}{dt}$ ، $\ddot{u} = \frac{d^2u}{dt^2}$ ، $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ و $\lambda = \frac{R}{2L}$

2- نبين في الرياضيات أن حل هذه المعادلة التفاضلية يتعلق بإشارة المقدار $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2$:

- الحالة الأولى: $\Delta' < 0$: التذبذبات شبه دورية.

يعبر عن الدالة u بالعلاقة: $u = E.e^{-\lambda t}\cos\frac{2\pi}{T}.t$

يتحقق هذا النظام بالنسبة لقيم R تحقق الشرط $R<R_C$.

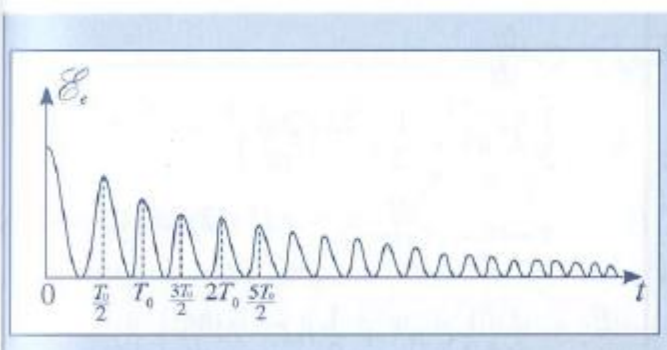
R_C: تسمى المقاومة الحرجة، وتتعلق ب L و C.

– الحالة الثانية: $\Delta' = 0$: نظام لادوري حرج، ويتحقق إذا كان: $R=R_C$.

يعبر عن الحل بالعلاقة: $u(t) = (At + B).e^{\alpha t}$

– الحالة الثالثة: $\Delta' > 0$: نظام لادوري فوق الحرج $R>R_C$

يعبر عن الحل بالعلاقة: $u(t) = ae^{\alpha_1 t} + be^{\alpha_2 t}$



1.2– بين أن تعبير المقاومة في النظام الحرج هو: $R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

احسب R_C.

2.2– يعبر عن شبه الدور T في النظام شبه الدوري بالعلاقة التالية: $T = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}}$، حيث T_0 شبه الدور الخاص للدارة $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

1.2.2– عبر عن T بدلالة T_0 و R و R_C. قارن T و T_0.

2.2.2– في أي حالة يمكن اعتبار $T \simeq T_0$.

3.2.2– نعتبر الآن أن مقاومة الدارة جد صغيرة، بحيث يكون شبه الدور T للدالة $u(t)$ مطابقا ل T_0: $T \simeq T_0$.

يمثل المنحنى جانبه تغيرات الطاقة $\mathscr{E}_e$ التي يختزنها المكثف بدلالة الزمن.

1.3.2.2– تحقق أن الطاقة المغنطيسية $\mathscr{E}_m$ التي تختزنها الوشيعة تكون منعدمة عند اللحظات: $t_1 = \frac{T_0}{2}$، $t_2=T_0$، $t_3 = 3\frac{T_0}{2}$....

2.3.2.2– عبر عن الطاقة $\mathscr{E}_n$ التي تختزنها الدارة عند اللحظة $t_n = n.\frac{T_0}{2}$ بدلالة $\mathscr{E}_0$، α و n، حيث n عدد صحيح و $\mathscr{E}_0$: الطاقة البدئية المُخَزَّنة في الدارة و $\alpha = \lambda T_0$

3.3.2.2– نعتبر أن التبادل الطاقي يتوقف بين المكثف والوشيعة عند اللحظة t_n التي تفقد فيها الدارة 99% من

الحل

1– إثبات المعادلة التفاضلية:

نطبق قانون إضافة التوترات:

$u+u_L+u_R=0$

ولدينا من جهة أخرى: $u_R=Ri$

و $u_L = L.\frac{di}{dt}$

وعلما أن $i = \frac{dq}{dt}$ و $q=C.u$، فإن: $u_R = RC.\frac{du}{dt}$

و $u_L = LC.\frac{du^2}{dt^2}$

وبالتالي: $u + RC.\frac{du}{dt} + LC.\frac{d^2u}{dt^2}$

$u + RC.\dot{u} + LC.\ddot{u} = 0$

$\ddot{u} + \frac{R}{L}.\dot{u} + \frac{1}{LC}.u = 0$

$\ddot{u} + 2\lambda\dot{u} + \omega_0^2 u = 0$

1.2– تعبير المقاومة الحرجة R_C:

لدينا في النظام الحرج: $\Delta' = \lambda^2 - \omega_0^2 = 0$

إذن: $\lambda = \omega_0$ $(\lambda > 0)$

يعني أن: $\frac{R}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

$R = 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

$R_C = 2\sqrt{\frac{L}{C}} = 2\sqrt{\frac{1}{25.10^{-6}}} = 400\Omega$

1.2.2– تعبير T:

لدينا: $T = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{\lambda^2}{4\pi^2}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{\lambda^2 T_0^2}{4\pi^2}}}$

وبما أن: $\lambda = \frac{R}{2L}$ و $T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$

فإن:

$$\frac{\lambda^2 T_0^2}{4\pi^2} = \frac{R^2}{4L^2}.\frac{4\pi^2 LC}{4\pi^2} = \frac{R^2}{4}\frac{C}{L}$$

وباعتبار العلاقة $2\sqrt{\frac{L}{C}} = R_C$ نكتب:

$$R^2.\frac{C}{4L} = \frac{R^2}{R_C^2}$$

وبالتالي:

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{R^2}{R_C^2}}}$$

بما أن التذبذبات توجد في النظام شبه الدوري فإن:

$$R<R_C$$

أي إن:

$$\frac{R^2}{R_C^2} < 1$$

يعني أن:

$$1 - \frac{R^2}{R_C^2} < 1$$

وكذلك:

$$\sqrt{1-\frac{R^2}{R_C^2}} < 1$$

ومنه:

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{R^2}{R_C^2}}} > 1$$

مما يعني أن:

$$\frac{T_0}{\sqrt{1-\frac{R^2}{R_C^2}}} > T_0$$

أي إن:

$$T>T_0$$

2.2.2- الخمود الجد ضعيف:

إذا كانت المقاومة R صغيرة جدا، بحيث $R<<R_C$

وبالتالي:

$$1 - \frac{R^2}{R_C^2} \simeq 1$$

تكون قيمة شبه الدور T في هذه الحالة قريبة جدا من T_0.

1.3.2.2- التحقق من انعدام طاقة الوشيعة:

تعبير طاقة الوشيعة هو:

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}L.i^2 = \frac{1}{2}L\left[C.\frac{du_C}{dt}\right]^2$$

عند اللحظات: $t_1 = \frac{T_0}{2}$، $t_2 = T_0$، $t_3 = 3\frac{T_0}{2}$ تأخذ الطاقة $\mathscr{E}_e$، وكذلك u_C قيما قصوية، مما يعني أن:

$$\frac{du_C}{dt} = 0$$

وبالتالي تكون $\mathscr{E}_m$ منعدمة.

2.3.2.2- تعبير الطاقة $\mathscr{E}_n$:

عند اللحظات $t_n = n.\frac{T_0}{2}$، تختزن الدارة الطاقة نفسها المُخَزَّنَة في المكثف، لأن الطاقة المُخَزَّنَة في الوشيعة تكون منعدمة.

يعني أن:

$$\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_{0(n)} = \frac{1}{2}C.u_{C(n)}^2$$

وبالرجوع إلى تعبير الدالة $u_C(t)$ في النظام شبه الدوري

حيث إن:

$$u_{C(n)} = E.e^{-\lambda t_n}.\cos\frac{2\pi}{T}.t_n$$

وحيث إن: $T=T_0$ و $t_n = n.\frac{T_0}{2}$، نكتب:

$$u_{C(n)} = E.e^{-\frac{\lambda T_0}{2}n}.\cos\frac{2\pi}{T_0}.n\frac{T_0}{2} = E.e^{-\frac{\lambda T_0}{2}n}.\cos n\pi$$

$$= \pm E.e^{\frac{-\lambda T_0}{2}n}$$

إذن:

$$\mathscr{E}_n = \frac{1}{2}C(u_C)^2 = \frac{1}{2}CE^2.e^{-\lambda T_0 n}$$

$$\mathscr{E}_n = \mathscr{E}_0.e^{-\alpha n}$$

3.3.2.2- تحديد العدد n:

عندما تفقد الدارة النسبة $\rho = 99\%$ من الطاقة البدئية $\mathscr{E}_0$. فإنها تختزن $(1-\rho) = 1\%$ من $\mathscr{E}_0$ يعني أن:

$$\mathscr{E}_n = (1-\rho)\mathscr{E}_0$$

$$\mathscr{E}_0.e^{-\alpha n} = (1-\rho).\mathscr{E}_0$$

$$-\alpha n = Ln(1-\rho)$$

$$n = -\frac{\ln(1-\rho)}{\alpha} = -\frac{2}{\lambda.T_0}.Ln(1-\rho)$$

$$n = -\frac{4L}{RT_0}Ln(1-\rho)$$

$$n = \frac{2L}{\pi R\sqrt{LC}}Ln(1-\rho)$$

$$n = -\frac{2.1}{\pi.5.\sqrt{1.25.10^{-6}}}.Ln(10^{-2}) = 116$$

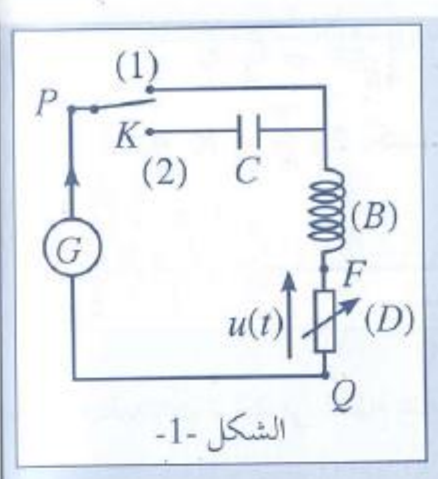
التمرين 17

تحديد المقادير المميزة لوشيعة ولمكثف

الوشـيعات والمكثفات كثيرة الاستعمال في الأجهزة والأنظمة الكهربائية والإلكترونية المتداولة (لعب الأطفال، الساعات الكهربائية، أجهزة الإنذار والتحكم...).

يهدف هذا التمرين إلى تحديد المقادير الفيزيائية المميزة لكل من وشـيعة ومكثف استخرجا من لعبة للأطفال، وذلك من خلال الدراسات التجريبية التالية:

- استجابة ثنائي قطب RL لرتبة توتر؛



الشكل -1-

– التذبذبات الكهربائية الحرة في دارة RLC متوالية؛

1– استجابة ثنائي قطب RL لرتبة توتر

ننجز التركيب التجريبي الممثل في الشكل –1– والمتكون من:

– (B): وشيعة معامل تحريضها L ومقاومتها r.

– (C): مكثف سعته C.

– (D): موصل أومي مقاومته R قابلة للضبط.

– (G): مولد (GBF) ذي تردد منخفض.

– K: قاطع تيار قابل للتأرجح بين الموضعين (1) و(2).

نضبط مقاومة الموصل الأومي على القيمة $R = 200\Omega$، ونؤرجح قاطع التيار K إلى الموضع (1) عند لحظة نختارها أصلا للتواريخ $(t=0)$، فيطبق المولد (G) رتبة صاعدة للتوتر قيمتها E ،ثم رتبة نازلة للتوتر قيمتها منعدمة بين مربطي ثنائي القطب PQ المكون من الوشيعة (B) والموصل الأومي (D).

– تعطي وثيقة الشكل –2– تغيرات التوتر u_{PQ} والتوتر u بين مربطي الموصل الأومي بدلالة الزمن.

$u_{PQ}(V)$, $u(V)$ — المنحنى (1) — المنحنى (2) — $t(s)$ — 0 ; 0,01 ; 0,02 — 0,5 ; 1 ; 1,5 ; 2

الشكل -2-

1.1– بيّن، معللا جوابك، أن المنحنى 2 يمثل تغيرات u بدلالة الزمن.

1.2– أثبت المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u أثناء إقامة التيار في الدارة.

1.3– أ– أوجد تعبير كل من الثابتتين A و τ بدلالة برامترات الدارة لتكون $u = A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$ حلا للمعادلة التفاضلية السابقة.

ب– اعتمادا على الشكل –2– عين، مبيانيا، قيمة كل من E وثابتة الزمن τ.

ج– استنتج قيمة L، علما أن $r = 22,2\Omega$.

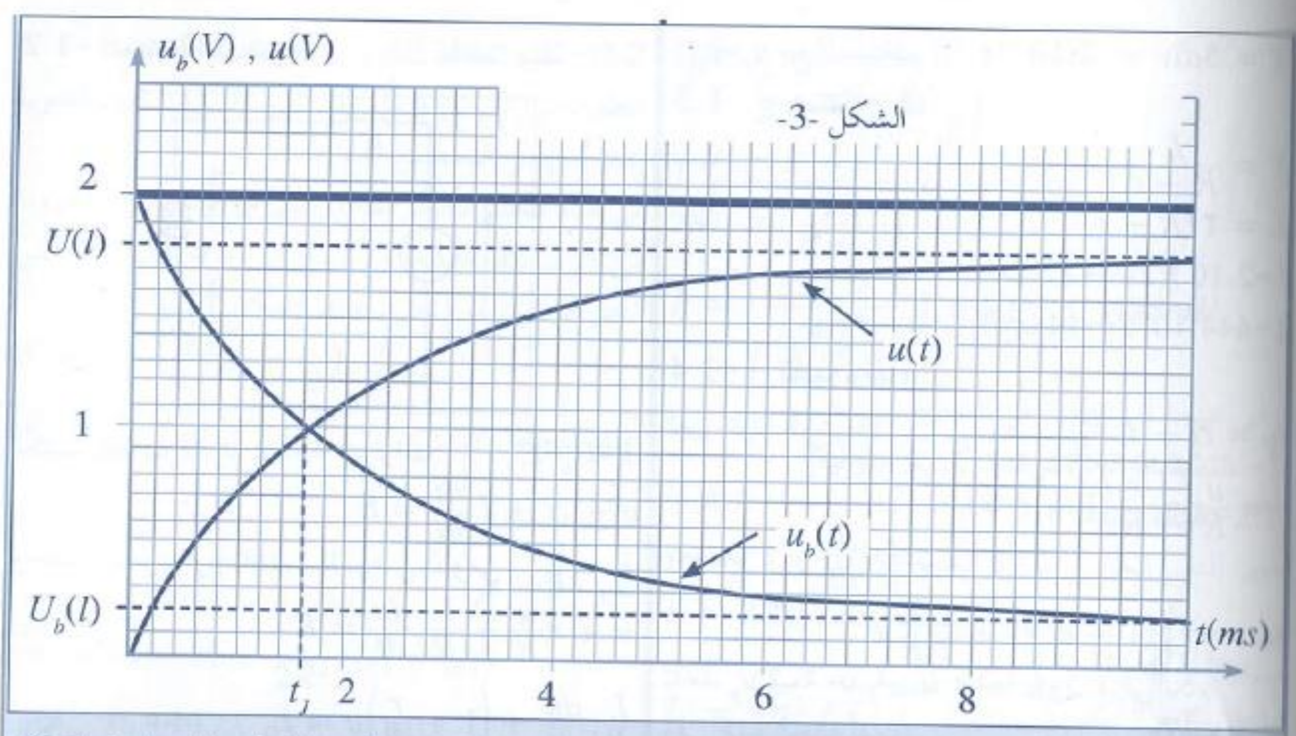
1.4– تعطي الوثيقة الممثلة في الشكل –3– تغيرات كل من التوتر u بين مربطي الموصل الأومي (D) والتوتر u_b بين مربطي الوشيعة (B) بدلالة الزمن في المجال $[0;10ms]$.

أ– لتكن $U_{b(0)}$ القيمة الحدية للتوتر u_b. أوجد علاقة بين $U_{b(0)}$ و E و r و R.

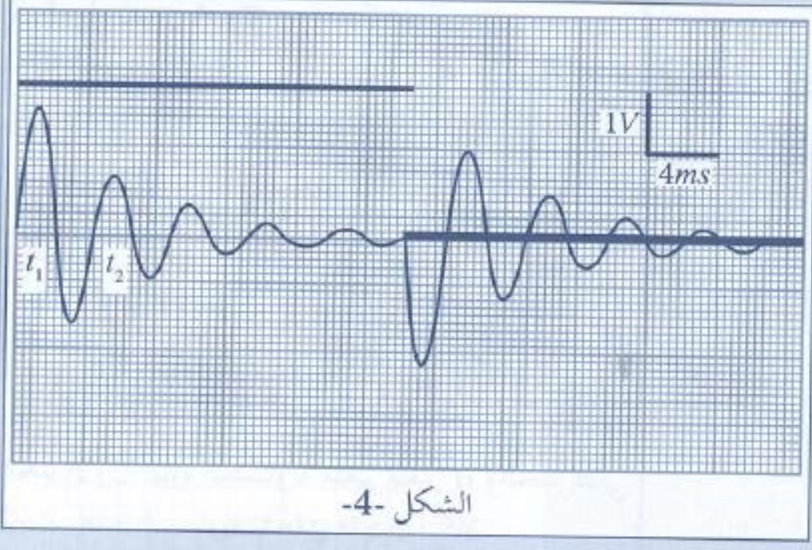
ب– يتقاطع المنحنيان $u(t)$ و $u_b(t)$ عند اللحظة t_j. بين أن $L = \dfrac{R + r}{Ln\left(\dfrac{2.R}{R - r}\right)}.t_j$، وتحقق من قيمة L التي تم حسابها مسبقا.

2– التذبذبات الحرة في دارة RLC متوالية

نضبط مقاومة الموصل الأومي على القيمة $R = 20\Omega$ ونؤرجح قاطع التيار K إلى الموضع (2)، عند لحظة



نختارها أصلا جديدا للتواريخ ($t=0$)، ونعاين على شاشة كاشف التذبذب الرسم التذبذبي الممثل في الشكل -4-، والذي يعطي التوتر u بين مربطي الموصل الأومي (D) على المدخل Y_1، والتوتر بين مربطي المولد G على المدخل Y_2.



الشكل -4-

2.1- أوجد، اعتمادا على هذا الرسم التذبذبي، قيمة السعة C للمكثف (C) باعتبار أن شبه الدور T للمتذبذب الكهربائي يساوي دوره الخاص.

2.2- احسب تغير الطاقة ΔE للدارة بين اللحظتين $t_1 = \frac{T}{4}$ واللحظة $t_2 = \frac{5T}{4}$.

عن الامتحان الوطني 2009 – الدورة الدورة الاستدراكية
شعبة العلوم الرياضية

الحـل

1- استجابة ثنائي قطب RL لرتبة توتر:

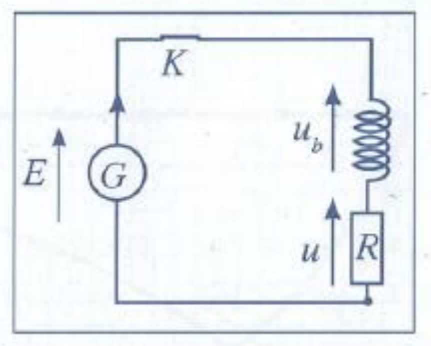
1.1- التعرف على المنحنى (2):

عند غلق الدارة، يمر تيار كهربائي في دارة الوشيعة، ونعلم أن الوشيعة تؤخر إقامة هذا التيار، وبما أن شدة هذا التيار تتناسب مع التوتر u بين مربطي الموصل الأومي، فإن u لها نفس هيأة الشدة i، يعني أنها تزايدية خلال إقامة التيار وتناقصية خلال انعدامه.

وبالتالي: (2) يمثل التوتر u

و(1) يمثل التوتر الثابت $E=2V$ المطبق من طرف المولد.

1.2- المعادلة التفاضلية:



نكتب حسب قانون إضافية التوترات: $u+U_b=E$

$$u + ri + L\frac{di}{dt} = E$$

وحسب قانون أوم بالنسبة للموصل الأومي: $i = \frac{u}{R}$

إذن:

$$u + r\frac{u}{R} + \frac{L}{R}\cdot\frac{du}{dt} = E$$

$$\frac{L}{R}\cdot\frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{r}{R}\right)u = E$$

أو

$$\frac{L}{R}\frac{du}{dt} + \frac{r+R}{R}.u = E$$

1.3- أ- تعبير A و τ:

لدينا الحل:

$$u = A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

إذن:

$$\frac{du}{dt} = \frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$$

بتعويض كل من u و $\frac{du}{dt}$ في المعادلة التفاضلية نكتب:

$$\frac{L}{R}\cdot\frac{A}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{r+R}{R}.A\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) = E$$

$$\left(\frac{L.A}{R.\tau} - \frac{r+R}{R}.A\right)e^{-\frac{t}{\tau}} = E - \frac{r+R}{R}.A$$

الحد الأول لهذه المتساوية متغير بتغير t، والحد الثاني ثابت. هذه المتساوية تتحقق فقط إذا كان:

$$E - \frac{r+R}{R}.A = 0$$

و

$$\left(\frac{L.A}{R\tau} - \frac{r+R}{R}\right)A = 0$$

يعني أن:

$$A = \frac{R}{R+r}.E$$

و

$$\tau = \frac{L}{R+r}$$

1.3- ب- تعيين E و τ مبيانيا:

- $E=2V$

- توافق τ لحظةتقاطع المماس عند $t=0$ للمنحنى $u_R=f(t)$ مع المستقيم E: $\tau = 5div \simeq 2.10^{-3}s$

1.3- ج- استنتاج L:

لدينا:

$$\tau = \frac{L}{R+r}$$

إذن:

$$L = \tau(R+r)$$

$$L=2.10^{-3}(200+22,2)$$

$$L=444.10^{-3}H=444mH$$

1.4- أ- تعبير $u_{b(t)}$:

تعبير توتر الوشيعة:

$$u_b = ri + L.\frac{di}{dt}$$

لدينا:

$$i = \frac{u}{R} = \frac{A}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

بتعويض i أو $\frac{di}{dt}$ نكتب:

$$u_b = r\frac{A}{R}\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right) + \frac{L.A}{\tau.R}.e^{-\frac{t}{\tau}}$$

تأخذ u_b قيمة حدية $u_{b(t)}$ عندما يؤول t إلى ∞.

وفي هذه الحالة لدينا: $e^{-\frac{t}{\tau}} \to 0$

$$u_{b(t)} = \frac{r.A}{R}(1-0) + 0$$

$$u_{b(t)} = \frac{r}{R}\cdot\frac{R}{R+r} = \frac{r}{R+r}.E$$

1.4- ب- التحقق من العلاقة ومن قيمة L:

عندما يتقاطع المنحنيان: $u_b(t_J) = u(t_J)$

يعني أن:

$$ri + L.\frac{di}{dt} = u$$

$$r.\frac{u}{R} + \frac{L}{R}\cdot\frac{du}{dt} = u$$

$$\frac{L}{R}\frac{du}{dt} = u\left(1 - \frac{r}{R}\right) = \frac{R-r}{R}.u$$

$$\frac{L}{R}\cdot\frac{A}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} = \frac{R-r}{R}.A.\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$\frac{L}{\tau}.e^{-\frac{t}{\tau}} = (R-r)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

ولدينا

$$\frac{L}{\tau} = R + r$$

إذن:

$$(R+r).e^{-\frac{t}{\tau}} = (R-r)\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

$$e^{-\frac{t}{\tau}}[R+r+R-r] = R-r$$

$$2R = (R-r).e^{\frac{t}{\tau}}$$

$$\frac{t}{\tau} = \ln\left(\frac{2R}{R-r}\right)$$

$$\tau = \frac{t}{\ln\left(\frac{2R}{R-r}\right)}$$

بتعويض t ب t_J و τ ب $\frac{L}{R+r}$ نكتب:

$$\frac{L}{R+r} = \frac{t_1}{\ln\left(\frac{2R}{R-r}\right)}$$

$$L = \frac{R+r}{\ln\left(\frac{2R}{R-r}\right)}.t_1$$

$$L = \frac{222,2}{\ln\left(\frac{400}{177,8}\right)}.1,6.10^{-3} \simeq 438mH$$

وهي نتيجة قريبة جدا من السابقة.

2- التذبذبات الحرة في دارة RLC متوالية:

2.1- قيمة السعة C:

تعبير الدور الخاص للدارة الحرة RLC:

$$T_0 = 2\pi\sqrt{L.C}$$

مبيانيا: $T=4ms$

باعتبار $T_0=T$ نكتب:

$$T^2 = 4\pi^2.L.C$$

$$C = \frac{T^2}{4\pi^2 L}$$

$$C = \frac{4^2.10^{-6}}{4.\pi^2.444.10^{-3}}$$

$$C = 0,91.10^{-6}F \simeq 0,9\mu F$$

2.2- تغير الطاقة ΔE:

انطلاقا من الشكل 4 نلاحظ أن شدة التيار تكون قصوية عند كل من اللحظتين t_1 و t_2.

في هذه الحالة تكون الطاقة الكهرمغنطيسية المخزونة في الوشيعة قصوية وتساوي الطاقة الكهربائية التي تختزنها الدارة، وتكون طاقة المكثف منعدمة:

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_m = \frac{1}{2}Li^2 = \frac{1}{2}L.\frac{u^2}{R^2}$$

عند اللحظة t_1:

$$\mathscr{E}_1 = \frac{1}{2R^2}Lu_1^2$$

وعند اللحظة t_2:

$$\mathscr{E}_2 = \frac{1}{2R^2}Lu_2^2$$

تغير الطاقة هو:

$$\Delta\mathscr{E} = \mathscr{E}_2 - \mathscr{E}_1 = \frac{L}{2R^2}(U_2^2 - U_1^2)$$

$$\Delta\mathscr{E} = \frac{0,444}{2.20^2}(0,8^2 - 1,7^2)$$

$$\Delta\mathscr{E} \simeq -1,25.10^3 J$$

التمرين 18

نشحن مكثفا سعته $C=5\mu F$ تحت توتر ثابت U_0 لمدة كافية ثم نصله بمربطي وشيعة مقاومتها $r = 10\Omega$ ومعامل تحريضها L (الشكل 1).

i ، (L,r) ، C ، u_C

الشكل - 1

نغلق الدارة عند اللحظة $t_0=0$ ونعاين التوتر u_C بين لولبي المكثف، يمثل منحنى الشكل 2 هيأة الدالة $u_C=f(t)$.

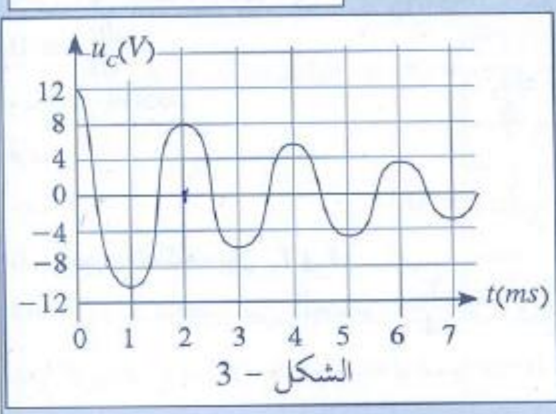
1- أوجد المعادلة التفاضلية التي يحققها التوتر u_C.

2- عين مبيانياً قيمة التوتر U_0 واستنتج الطاقة الكهربائية E_0 التي تختزنها الدارة عند اللحظة $t_0=0$.

3- ما طبيعة التذبذبات التي تعتبر الدالة مقراً لها؟

4- نعتبر أن شبه الدور T للتذبذبات مساوي للدور الخاص T_0 للدارة. حدد T واستنتج L.

5- باستعمال المبيان، تحقق أن الطاقة المغناطيسية التي تختزنها الوشيعة منعدمة عند اللحظات t_n بحيث: $t_n = n.\frac{T_0}{2}$ (n عدد صحيح)



الشكل - 3

6- هل المكثف يشحن أم يفرغ بين اللحظتين $t_1 = \frac{T_0}{4}$ و $t_2 = \frac{T_0}{2}$؟ علل جوابك.

7- يعبر عن حل المعادلة التفاضلية السابقة في حالة الخمود الضعيف بالعلاقة التالية:

$$u_C(t) = U_0.e^{-\lambda t}.\cos\frac{2\pi}{T_0}.t$$

حيث: λ ثابتة تتعلق بـ r و L.

1.7- بين ان شدة التيار عند اللحظة $t_1 = \frac{T_0}{4}$ يمكن أن يعبر عنها بالعلاقة التالية: $i_1 = -U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.e^{-\lambda\frac{T_0}{4}}$

2.7- عبر عن الطاقة الكهربائية $\Delta\mathscr{E}$ المبددة في الدارة بين اللحظتين t_0=0 وt_1 بدلالة E_0 وλ وT_0.

الحل

1- المعادلة التفاضلية:

باستعمال قانون إضافية التوترات نجد:

$$u_C + r.C.\frac{du_C}{dt} + LC.\frac{d^2u_C}{dt^2} = 0$$

2- تعيين U_0 و $\mathscr{E}_0$:

مبيانيا: U_0=12V ومنه:

$$\mathscr{E}_\infty = \mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}C.U_0^2$$

$$\mathscr{E}_0 = \frac{1}{2}.5.10^{-6}.(12)^2 = 3,6.10^{-4}J$$

3- طبيعة التذبذبات:

تذبذبات كهربائية شبه دورية.

4- تحديد L وT:

شبه الدور يطابق الدور الخاص للدارة، إذن:

$$T = T_0 = 2\pi\sqrt{LC}$$

و منه:

$$L = \frac{T^2}{4\pi^2.C}$$

$$L = \frac{(2.10^{-3})^2}{4.\pi^2.5.10^{-6}} \simeq 0,02H$$

5- التحقق من انعدام الطاقة $\mathscr{E}_m$:

عند اللحظات $t_n = n.\frac{T_0}{2}$ لدينا u_C قصوية أو دنوية يعني أن المماس لمنحنى الدالة $u_C(t)$ أفقي ومنه:

$$\frac{du_C}{dt} = 0$$

وباعتبار العلاقة: $i = C.\frac{du_C}{dt}$

فإن: i=0

ومنه: $\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}L.i^2 = 0$

6- تصرف المكثف بين t_1 وt_2:

الدالة $u_C(t)$ تناقصية بين اللحظتين: $t_1 = \frac{T_0}{4}$ و $t_2 = \frac{T_0}{2}$

إذن: $u_C^2(t)$ دالة تزايدية.

ومنه نستنتج أن: $\mathscr{E}_e = \frac{1}{2}.C.u_C^2$ هي أيضا تزايدية. وبالتالي فإن المكثف يشحن.

1.7- إثبات تعبير i_1:

لدينا: $u_C = U_0.e^{-\lambda t}.\cos\frac{2\pi}{T_0}.t$

$$\frac{du_C}{dt} = -\lambda.U_0.e^{-\lambda t}.\cos\frac{2\pi}{T_0}.t - \frac{2\pi}{T_0}.U_0.e^{-\lambda t}.\sin\frac{2\pi}{T_0}.t$$

$$i = C.\frac{du_C}{dt}$$

$$= -C.U_0.e^{-\lambda t}.\left[\lambda.\cos\frac{2\pi}{T_0}.t + \frac{2\pi}{T_0}.\sin\frac{2\pi}{T_0}.t\right]$$

عند $t_1 = \frac{T_0}{4}$: $\cos\frac{2\pi.t_1}{T_0} = \cos\frac{\pi}{2} = 0$

و $\sin\frac{2\pi.t_1}{T_0} = 1$

إذن: $i_1 = -C.U_0.e^{-\lambda t}.\frac{2\pi}{T_0} = -U_0\sqrt{\frac{C}{L}}.e^{-\lambda\frac{T_0}{4}}$

2.7- تعبير $\Delta\mathscr{E}$:

عند $t_1 = \frac{T_0}{4}$: u_C=0 وبالتالي: $\mathscr{E}_e = 0$

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}L.i_1^2$$

$$\mathscr{E}_m = \frac{1}{2}L.U_0^2.\frac{C}{L}.e^{-\lambda\frac{T_0}{2}} = \frac{1}{2}C.U_0^2.e^{-\lambda\frac{T_0}{2}}$$

$$\mathscr{E}_m = \mathscr{E}_0.e^{-\lambda\frac{T_0}{2}}$$

وعند اللحظة t_0=0 لدينا: $\mathscr{E}_m = 0$ و $\mathscr{E}_\infty = \frac{1}{2}CU_0^2$

إذن:

$$\Delta\mathscr{E} = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_0 = \mathscr{E}_m - \mathscr{E}_\infty$$

$$= \mathscr{E}_0.e^{-\lambda\frac{T_0}{2}} - \mathscr{E}_0$$

$$= \mathscr{E}_0\left(e^{-\lambda\frac{T_0}{2}} - 1\right)$$

RI^2

$E=$

$\lambda=$